



# Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées : équations aux dérivées partielles et discrétisation

Olivier Riviere

## ► To cite this version:

Olivier Riviere. Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées : équations aux dérivées partielles et discrétisation. Mathématiques [math]. Université René Descartes - Paris V, 2005. Français. NNT : . tel-00011231

**HAL Id: tel-00011231**

**<https://theses.hal.science/tel-00011231>**

Submitted on 17 Dec 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ RENÉ DESCARTES - PARIS 5**  
**Centre Universitaire des Saints-Pères**  
**UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE**

**Thèse**

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université René Descartes - Paris 5**

**Discipline : Mathématiques**  
**Spécialité : Probabilités**

présentée par

**Olivier RIVIERE**

---

**Equations différentielles stochastiques progressives**  
**rétrogrades couplées :**  
**Equations aux dérivées partielles et discrétisation**

---

Soutenue publiquement le 13 décembre 2005, devant le jury composé de :

Romain ABRAHAM	Directeur de thèse
Mireille CHALEYAT-MAUREL	Présidente
François COQUET	Examineur
Emmanuel GOBET	Rapporteur
Etienne PARDOUX	Rapporteur



# Remerciements

Comment en quelques lignes exprimer toute la reconnaissance que j'éprouve après quatre années où j'aurais connu joie, frustration, périodes de doutes, surprises inattendues et finalement, immense soulagement ? Je vais certainement oublier quantité d'amis, de collègues, d'anciens professeurs qui auraient leur place ici : je m'en excuse auprès d'eux par avance.

Je voudrais tout d'abord remercier Romain Abraham, sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. Elle n'a peut-être pas pris la direction que nous imaginions à la fin de mon stage de DEA, mais au bout du compte elle est bel et bien là. Je lui suis reconnaissant d'avoir su me remettre sur les rails lorsque je m'égarais, d'avoir toujours fait preuve de patience et de disponibilité. Au vu des nombreuses questions existentielles auxquelles il a dû répondre, il outrepassait largement son rôle de directeur de thèse. Il a entraîné sa femme Isabelle dans mes problèmes de programmation du schéma de discrétisation, ce qui aurait été un motif de rupture pour n'importe quelle autre épouse. J'en profite pour la remercier, ces petites séances de programmation en C m'ont été très profitables.

Je remercie chaleureusement Emmanuel Gobet et Etienne Pardoux d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Mettre en application à la rédaction de ma thèse, la principale technique qui s'y rapporte, le théorème du point fixe, n'a vraiment pas dû être de tout repos pour eux. La version finale doit beaucoup à leurs remarques et commentaires avisés. François Coquet a tout de suite accepté de faire partie de mon jury, je lui en suis infiniment reconnaissant. Rien que pour m'avoir permis d'assister à des exposés fascinants, je me devais de rendre la pareille à Mireille Chaleyat-Maurel. J'espère que ma soutenance répondra à ce souhait.

Il m'a été très plaisant de côtoyer pendant quatre ans tous les membres du laboratoire MAP5. Comme ils n'en font désormais plus partie, je me permets en particulier de témoigner ma gratitude à Bernard Ycart et Laurent Serlet. Ils m'ont été d'une aide précieuse par leurs conseils et leurs encouragements pour l'enseignement comme pour la recherche. Je garderai toujours en tête à l'approche d'une conférence anglophone, la prononciation exacte de Bernard de la séquence *"what I have to add"*, espérant atteindre un jour qui sait, un gargarisme compréhensible. J'ajoute un petit mot de remerciement pour le secrétariat du laboratoire et de l'UFR : Nellie, Marie-Hélène, Voeuni Kheng, Christophe qui ont toujours répondu à mes questions et exigences avec le sourire.

Sans oublier nos administrateurs réseaux Laurent et Thierry pour leur disponibilité et leur compétence, en dépit de l'énorme tâche qui leur incombe.

Toute thèse ayant un point de départ, je profite de l'occasion pour exprimer ma reconnaissance aux excellents professeurs qui ont jalonné mon parcours : tout d'abord Mme Fouillard, dont l'enseignement passionné et sans égal a certainement influencé ma vocation. Je n'oublie pas M. Wigdorowicz (j'ai fait des efforts pour l'orthographe), M. Melin et plus encore Y. Duval. Si les deux premiers m'ont appris la rigueur, je dois certainement à Y. Duval de savoir (parfois) me servir de ma tête. Mes années à Orsay m'ont également permis de côtoyer certes de brillants chercheurs mais surtout des pédagogues extraordinaires. Je pense à W. Werner, R. Cerf, P. Massart. J'espère avoir répondu à la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'obtenant une allocation de recherche.

Cette page ne serait pas complète sans la mention des amis que je fréquentais au quotidien. Cette thèse n'aurait pas été ce qu'elle est sans les conseils de Christian, les explications passionnées de Raphaël, les légendaires blagues de Béatrice ou encore les subtils casse-tête de David. Je n'oublie pas le sourire ensoleillé de Javiera et les attentions sucrées de Moez, Faten et Nizar. Entre les tartes meringuées au citron de Javiera et les pâtisseries tunisiennes, mon dentiste s'est fait une fortune et il vous en remercie. Désolé, pour les sudokuistes du 4ème, il est totalement irréaliste de mettre un sudoku ici, je ne tiens pas à perdre mon auditoire.

Mes derniers remerciements - mais non les moindres - iront à ma famille. Je tiens en premier lieu à féliciter ma soeur d'avoir si brillamment profité de mes piètres talents de pédagogue. Tu as exploité ton potentiel de manière remarquable. Enfin, je dédie ma thèse à mes parents qui m'ont toujours soutenu et qui ont fait nombre de sacrifices afin que ma soeur et moi en arrivions là où nous sommes actuellement.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Les méthodes de “waveform relaxation”</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Convergence de la “waveform relaxation” . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées</b>	<b>33</b>
3.1	Equations différentielles stochastiques rétrogrades . . . . .	34
3.1.1	Introduction . . . . .	34
3.1.2	Existence, unicité et comparaison des solutions . . . . .	36
3.2	Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées . . . . .	45
3.2.1	Particularités du cas $\sigma$ dépendant de $z$ . . . . .	45
3.2.2	Existence et unicité locale des solutions . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Equations aux dérivées partielles</b>	<b>63</b>
4.1	Equations aux dérivées partielles linéaires, formule de Feynman- Kac . . . . .	63
4.2	Solutions de viscosité . . . . .	66
4.3	Equations aux dérivées partielles non linéaires et équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades . . . . .	72

4.3.1	Approche par le schéma en 4 étapes . . . . .	75
4.3.2	Approche par les solutions de viscosité . . . . .	77
4.4	Cas où le coefficient d'ordre 2 dépend du gradient . . . . .	80
4.5	Cas unidimensionnel : cas d'une fonction $M$ croissante sur $[0, +\infty[$ . . . . .	90
4.6	Cas unidimensionnel : cas d'une fonction $M$ décroissante sur $[0, +\infty[$ . . . . .	96
4.7	Quelques cas en dimension 2 . . . . .	102
4.7.1	Cas d'une matrice hyperdiagonale . . . . .	103
4.7.2	Cas d'une matrice diagonale avec un coefficient constant . . . . .	104
4.7.3	Cas d'une matrice diagonale aux coefficients localement inversibles . . .	105
4.7.4	Exemple d'un cas incertain . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Discrétisation des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées</b>	<b>109</b>
5.1	Discrétisation d'équations différentielles stochastiques rétrogrades . . . . .	110
5.2	Discrétisation des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades	116
5.3	Formules de discrétisation . . . . .	119
5.4	Etude d'un exemple particulier . . . . .	124
5.5	Evaluation de $\sup \{ \ \tilde{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\  \mid k \in \{0, \dots, n\} \}$ . . . . .	134
5.6	Evaluation de $\sup \{ \ \hat{\Theta}^k - \tilde{\Theta}^k\  \mid k \in \{0, \dots, n\} \}$ . . . . .	139
5.7	Conclusion . . . . .	140

# Chapitre 1

## Introduction

Les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPR) ont été introduites par Bismut en 1973 [5] dans le but de résoudre un problème de théorie du contrôle. A l'époque, il s'agissait de résoudre un système découplé ne comprenant qu'une équation différentielle stochastique progressive classique et une équation différentielle stochastique linéaire rétrograde.

La recherche s'est naturellement concentrée sur l'étude de l'équation rétrograde car, dans ce contexte, elle seule posait réellement des difficultés. De nombreuses avancées théoriques ont ainsi été réalisées sur le thème des équations différentielles stochastiques rétrogrades, et bon nombre de domaines ont pu en profiter.

En effet, aux applications à la théorie du contrôle est venue s'ajouter la résolution de nombreux problèmes de finance et de géométrie différentielle. Pour ne citer qu'un exemple, la couverture d'un call européen, sous les hypothèses les plus simples de modélisation, peut être assimilée à la résolution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$V_t = (S_T - K)_+ - \int_t^T Z_r dB_r,$$

où  $S_t$  désigne le cours de l'actif au temps  $t$ ,  $V_t$  la valeur actualisée du portefeuille au temps  $t$ ,  $K$  le prix d'exercice du call au temps  $T$  et  $(Z_r)_{r \geq 0}$  désigne alors la stratégie à employer.

Peng découvre en 1992 [36] que les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) peuvent générer des représentations probabilistes de solutions d'équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires ou quasi-linéaires. Il établit ainsi non seulement un lien entre équations différentielles stochastiques rétrogrades et équations aux dérivées partielles trouvant par la même occasion un autre domaine d'application, mais ouvre la voie à de nouvelles méthodes et de nombreux résultats. L'étude des EDSR étant alors bien maîtrisée, les tentatives d'extension aux équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées ont débuté dans les années 90. En s'inspirant des techniques employées pour les EDSR,



mais en les généralisant par un argument de point fixe, en 1993 Antonelli [2] prouve l'existence et l'unicité locale d'une famille d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées. De plus, par un contre-exemple, il montre que sauf conditions particulières, on ne peut espérer rendre ce résultat global.

Beaucoup de travaux se sont alors efforcés d'affaiblir les hypothèses nécessaires à assurer l'existence et l'unicité des solutions d'EDSPR ou d'en décrire plus finement les propriétés, tout en gardant comme principal argument de démonstration une méthode de point fixe. Les plus généraux étant sans aucun doute obtenus par Pardoux et Tang en 1999 [35] ou par Peng et Wu [37] la même année, sous des hypothèses sur les coefficients assez dissemblables. Notons toutefois que Pardoux et Tang en profitaient pour étendre le lien existant entre EDSPR et EDP sur toute une nouvelle classe d'EDP. En effet, depuis 1994 et l'article de Ma Protter et Yong [28] pour des coefficients déterministes, fortement réguliers et sous une hypothèse de non dégénérescence du coefficient de diffusion de l'équation progressive, nous disposons d'un théorème d'existence et d'unicité, d'une expression explicite des solutions et d'un algorithme de résolution en 4 étapes fort simple. Celui-ci ramène d'ailleurs le problème d'existence et d'unicité de l'équation différentielle stochastique progressive rétrograde à la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Les résultats de Pardoux et Tang s'affranchissent de l'hypothèse de non dégénérescence et de la forte régularité requise pour les coefficients. En contrepartie, les résultats d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades ne sont plus forcément globaux et les solutions des équations aux dérivées partielles associées sont des solutions en un sens plus "faible".

Pour préciser l'apport du lien ainsi révélé entre équations aux dérivées partielles et équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées, relevons que les derniers résultats d'existence et d'unicité globale sur les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées du type

$$(S) \quad \begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r) dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r \end{cases}$$

avec  $f, g, \sigma, \Phi$  déterministes et  $\sigma$  non dégénéré, de Delarue [10] et le récent schéma numérique proposé par Delarue et Menozzi [9], s'appuient en premier lieu sur le fait de pouvoir associer de manière unique à toute EDSPR de la forme (S), l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \begin{cases} \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m, \forall l \in \{1, \dots, m\}, \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\sigma^t \sigma)_{i,j}(t, x, \theta(t, x)) \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ + \sum_{i=1}^m f_i \left( t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)) \right) \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t, x) \\ + g \left( t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)) \right) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^m, \theta(T, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

L'objectif de cette thèse est d'étudier le cas très particulier des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades de la forme

$$(\bar{\mathcal{S}}) \quad \begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r) dB_r, \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r, \end{cases}$$

les coefficients  $f, g, \sigma, \Phi$  pouvant être aléatoires et  $\sigma$  dépendant donc de  $Z$ . Une part non négligeable de la thèse sera également consacrée (dans le cas où les coefficients  $f, g, \sigma, \Phi$  sont de plus supposés déterministes) à représenter une nouvelle classe d'équations aux dérivées partielles par les solutions de systèmes de type  $(\bar{\mathcal{S}})$ . Cependant à l'instar des systèmes  $(\mathcal{S})$ , seulement une famille de systèmes de type  $(\bar{\mathcal{S}})$  sera concernée. Les méthodes consistant à passer par l'EDP pour obtenir des renseignements sur l'EDSPR ne pourront donc pas améliorer les théorèmes d'existence et d'unicité dans notre cas. Ces résultats n'en perdent toutefois pas tout intérêt, ils nous donnerons en effet en suivant une autre approche que celle de Ma Protter et Yong [28], une idée des équations aux dérivées partielles que l'on peut représenter par les systèmes  $(\bar{\mathcal{S}})$ .

Les équations aux dérivées partielles obtenues ainsi ont la particularité de présenter des coefficients d'ordre 2 dépendant du gradient. Or de nombreux phénomènes sont régis par de telles équations. Prenons l'exemple du débruitage en imagerie qui fut la motivation initiale de cette thèse. Malgré tous les progrès techniques envisageables, tous les instruments de mesure disposent d'une certaine tolérance ; les résultats qui en résultent ne peuvent être considérés comme conformes à la source qu'ils doivent reproduire. C'est le cas par exemple des scanners, radars, appareils photographiques qui pour la plupart font dorénavant partie de notre vie quotidienne. La reproduction obtenue est dite alors "bruitée". Tout un secteur des recherches en imagerie consiste à atténuer voir éliminer ce parasitage : c'est ce que l'on nomme le débruitage.

Si l'on considère l'information que l'on doit traiter comme un signal, on parlera sans ambiguïté du signal source pour qualifier l'information d'origine et du signal bruité pour désigner le signal de sortie produit par l'appareil de mesure.

En théorie, on suppose que le matériel de mesure est tout de même suffisamment fiable pour que "le bruit", c'est à dire ce qui différencie le signal bruité du signal source, soit faible devant le signal source. Aussi les différentes techniques mathématiques de débruitage consistent en général à moyenner le signal bruité ce qui, si l'on considère le bruit comme un signal aléatoire, a pour vertu de garder le signal fort donc le signal source mais à éliminer les parasites aléatoires donc le bruit. Ceci se fait à l'aide d'outils d'analyse comme les noyaux gaussiens, ou de manière plus évoluée avec des bases d'ondelettes.

Prenons par exemple une image de  $N$  pixels par  $N$  pixels. On l'assimilera de manière formelle à un signal continu  $f : [1, N] \times [1, N] \rightarrow \mathbb{R}$ . Appliquer un noyau gaussien à cette image, consiste à considérer

$$U(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(2\pi t)} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2t}} f(y) dy$$

où  $t$  est un paramètre d'échelle permettant de focaliser l'application du noyau autour du point  $x$ .

Or par le calcul, on s'aperçoit sans trop de difficultés que  $U$  est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta U(t, x) \\ U(0, x) = f(x) \end{cases}$$

et qu'en termes probabilistes l'expression précédente de  $U$  se traduit par  $U(t, x) = E_x(f(B_t))$  où  $(B_t)$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$  et  $E_x$  signifie que l'on calcule l'espérance en supposant que  $(B_t)$  part de  $x$  au temps  $t = 0$ .

Le débruitage obtenu par le modèle précédent a un inconvénient majeur : il lisse les parties irrégulières du signal source. Or dans le cas des images, les irrégularités du signal correspondent aux contours des objets et constituent donc une part importante de l'information du signal. En éliminant les irrégularités d'une image, on modifie profondément la perception que l'oeil humain s'en fait.

L'idée fréquemment adoptée par les mathématiciens en imagerie est de prévoir la proximité d'un contour dans une image en mesurant localement le gradient du signal la représentant. Pour cette raison, la distance en variation totale est devenue un outil de base en imagerie. En partant de cette idée et en interprétant comme précédemment le débruitage au moyen des équations aux dérivées partielles, Perrona et Malik [38] proposent de s'intéresser à la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla U|)) \nabla U \\ U(0, x) = f(x) \end{cases}$$

où  $g$  est par exemple une densité gaussienne. Cette équation aux dérivées partielles s'inscrit donc dans le cadre des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 non linéaires avec des coefficients d'ordre 2 qui dépendent du gradient.

Jusqu'à présent il n'existe que très peu de techniques permettant de donner une représentation probabiliste des solutions d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 non linéaires. Qui plus est, on s'aperçoit que les classes d'équations aux dérivées partielles concernées sont presque disjointes. De manière à décrire le plus clairement possible les plus représentatives, nous rappelons brièvement qu'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ku + g = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^p \\ u(T, x) = \Phi(x), \end{cases}$$

sous des hypothèses que nous ne précisons pas ici, admet pour unique solution la fonction

$$u(t, x) = E \left[ \Phi(X_T^{t,x}) \exp \left( - \int_t^T k(r, X_r^{t,x}) dr \right) + \int_t^T g(r, X_r^{t,x}) \exp \left( - \int_t^r k(u, X_u^{t,x}) du \right) dr \right]$$

où  $(X_s^{t,x})_{s \geq 0}$  désigne le processus solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_s = x + \int_t^s f(r, X_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r)dB_r.$$

L'expression de la solution ainsi obtenue est communément désignée par “la formule de Feynman-Kac”. On dispose aujourd'hui de plusieurs généralisations de cette formule.

La plus ancienne à notre connaissance, consiste à considérer en lieu et place de l'équation différentielle stochastique précédente, une équation différentielle stochastique contrôlée, i.e. dont les coefficients  $\sigma$  et  $f$  dépendent d'une fonction de  $t$  et de  $x$ . Cette fonction est soumise à certaines contraintes de manière à minimiser un certain coût. En désignant par  $u(t, x)$ , le coût minimal depuis l'instant  $t$  lorsque le processus contrôlé part à l'instant  $t$  de  $x$ , on montre que  $u$  est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire.

Une autre, consiste à faire dépendre les coefficients de l'équation différentielle stochastique à la fois de  $X_t$  et de sa loi de probabilité. On peut alors associer à ce processus, une équation aux dérivées partielles régissant l'évolution de la loi de  $X_t$  [30]. Parmi les nombreuses applications de cette modélisation, citons la représentation de l'équation de Boltzmann [31], les méthodes numériques de type “méthodes particulières stochastiques” [19].

Une troisième consiste à substituer au processus de diffusion, un processus de diffusion branchement ou super-processus. Cette technique a permis entre autres d'obtenir une représentation probabiliste de l'équation  $\Delta u = u^2$  (voir par exemple [26][13][14]).

Enfin, celle qui nous intéresse le plus réside à considérer la solution  $(Y, Z)$  d'une équation différentielle stochastique rétrograde ou  $(X, Y, Z)$  la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées. Les coefficients des équations aux dérivées partielles concernées sont en général pris lipschitziens et diffèrent donc par exemple des hypothèses de régularité prises pour la représentation par les super-processus.

L'exemple suivant va nous permettre d'illustrer le principe de cette généralisation de la formule de Feynman-Kac. Supposons en effet que  $u$  soit solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u) = 0 \\ u(T, x) = g(x) \end{cases}$$

où  $f$  non linéaire et  $\mathcal{L}$  générateur infinitésimal d'un processus de diffusion  $X$  i.e.

$$\begin{cases} dX_s = b(t, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s \\ \mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(t, x)\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors par la formule d'Itô, on obtient

$$u(t, X_t) = u(T, X_T) - \int_t^T \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u \right) (s, X_s) ds + \int_t^T \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) (s, X_s) dB_s. \quad (1.1)$$

Si l'on pose alors  $Y_t = u(t, X_t)$ , le processus  $Y$  vérifie

$$Y_t = E \left[ g(X_T) + \int_t^T f(Y_s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

De plus, si l'on pose

$$\chi = g(X_T) + \int_0^T f(Y_s) ds,$$

le théorème de représentation martingale appliqué à la variable  $\mathcal{F}_T$ -mesurable  $\chi$  nous permet de définir le processus progressivement mesurable  $Z$  tel que

$$\chi = E[\chi] + \int_0^T Z_s dB_s.$$

On vérifie alors que le couple  $(Y, Z)$  vérifie l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(Y_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s. \quad (1.2)$$

On a donc  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  où  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s b(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dB_r \\ Y_s = g(X_T) + \int_s^T f(Y_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r. \end{cases}$$

De plus, par identification de (1.1) et (1.2), on obtient  $Z_s^{t,x} = \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) (s, X_s^{t,x})$ .

Fort de l'écriture obtenue dans le cas précédent pour  $Z$  et des conclusions de l'article de Ma, Protter et Yong [28], il nous a semblé naturel pour le cas d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 avec dépendance en le gradient, d'étudier les solutions d'un système d'équations différentielles progressives rétrogrades présentant un réel couplage particulièrement en  $Z$  :

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r) dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r \end{cases}$$

Dans la **première partie** (chapitre 2), nous exposerons ce que l'on appelle la "waveform relaxation". Sous ce titre un peu pompeux se cache essentiellement une variation (un cas particulier, pour être plus précis) du célèbre théorème du point fixe de Picard. Cette partie ne présente pas de résultats nouveaux, elle contient même de nombreux résultats classiques d'analyse matricielle. Nous avons toutefois mis la plupart des démonstrations, dans un souci de compréhension pensant que les mathématiques qui y sont abordées sont assez disjointes du reste de la thèse et surtout ne rentrent pas particulièrement dans le domaine des probabilités. Ces méthodes sont issues de la résolution d'équations matricielles comme l'inversion de matrice, mais s'adaptent bien à nos besoins. Elles sont particulièrement utiles à l'étude des grands systèmes de part leur aptitude à s'adapter au calcul parallèle. Nous ne les utiliserons pas avec cet objectif, mais plutôt pour leur aptitude à améliorer le contrôle de la constante de contraction du théorème du point fixe de Picard et à découpler les systèmes d'équations. Sans entrer dans les détails, nous montrerons que dans bien des cas, par une décomposition judicieuse de l'espace ambiant ( $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_d$ ), une équation du type  $U = \Pi U + G$  avec  $\Pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  et  $G \in \mathcal{E}$  se ramène à un système d'équations

$$\begin{cases} U_1 = \Pi_1(U_1, \dots, U_d) + G_1 \\ U_2 = \Pi_2(U_1, \dots, U_d) + G_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ U_d = \Pi_d(U_1, \dots, U_d) + G_d \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{E} \\ U_{n+1} = \Pi U_n + G \end{cases}$$

Dans la **deuxième partie** (chapitre 3), certainement la plus technique mais aussi le noyau dur de cette thèse, nous étudierons en détail les équations différentielles progressives rétrogrades couplées. Nous suivrons une approche chronologique, au sens où nous donnerons un bref aperçu

des techniques et outils nécessaires à leur utilisation sur l'exemple "plus simple" des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sur lequel est construit un mouvement brownien  $(B_t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , en notant  $(\mathcal{F}_t)$  sa filtration satisfaisant les conditions usuelles, nous chercherons à résoudre pour une condition terminale  $\xi$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable, l'équation

$$Y_s = \xi + \int_s^T g(r, Y_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r$$

ou sous forme différentielle le système

$$\begin{cases} dY_s = -g(s, Y_s)ds + Z_s dB_s \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Pour être plus précis, nous montrerons que si  $g$  est lipschitzienne, l'équation précédente possède un unique couple de solutions adaptées  $(Y, Z)$ . Cet exemple sera pour nous l'occasion de souligner le rôle de  $Z$  dans ce type d'équations, d'avoir un premier aperçu de l'emploi du théorème du point fixe mais aussi de comprendre la technique de prolongement permettant de passer d'un résultat d'existence et d'unicité local au résultat global. Enfin, nous verrons que l'on peut comparer les solutions de deux équations différentielles stochastiques rétrogrades différentes.

Après cette mise en bouche, nous pourrions nous intéresser aux équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées, c'est à dire à des systèmes de la forme

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r) dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r \end{cases} \quad (1.3)$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_s = f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)dB_s \\ dY_s = -g(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + Z_s dB_s. \end{cases}$$

Nous nous efforcerons alors dans un premier temps de mettre en évidence les profondes différences entre les cas  $\sigma$  dépendant de  $Z$  et  $\sigma$  ne dépendant pas de  $Z$ . Nous verrons en effet qu'à l'instar du second cas, lorsque  $\sigma$  dépend de  $Z$ , non seulement on devra imposer une condition supplémentaire sur  $\sigma$  et son rapport à sa dernière coordonnée pour avoir existence et unicité locale, mais qu'en l'absence de théorèmes suffisamment généraux de comparaison des solutions et privé du lien fort et systématique avec les équations aux dérivées partielles lorsque  $\sigma$  est non dégénéré, le prolongement à une solution globale par cet artifice sera caduc. Nous illustrerons cette différence majeure avec le cas  $\sigma$  non dépendant de  $Z$  et non dégénéré au travers d'un exemple simple. Nous nous concentrerons donc plutôt sur le contrôle de la constante de contraction au moyen de la "waveform relaxation" introduite dans la première partie.

Pour être plus précis, nous considérerons sous des hypothèses de régularité lipschitzienne sur les coefficients  $f, g, \sigma$  et  $\Phi$  l'application

$$\Psi^{t,x} : \begin{cases} (U, V, W) \mapsto (\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \\ \hat{U}_s = x + \int_t^s f(r, U_r, V_r, W_r) dr + \int_t^s \sigma(r, U_r, V_r, W_r) dB_r \\ \hat{V}_s = E \left[ \Phi(U_T) + \int_t^T g(r, U_r, V_r, Z_r) dr \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ \hat{W}_s = E \left[ \Phi(U_T) + \int_t^T g(r, U_r, V_r, W_r) dr + \int_t^T \hat{W}_s dB_s \right] \end{cases}$$

et montrerons que si le rayon spectral d'une certaine matrice dépendant de  $T - t$  et des constantes de lipschitz de  $f, g, \sigma$  et  $\Phi$  est strictement inférieur à 1, alors  $\Psi^{t,x}$  est contractante pour une certaine norme. Par cette approche originale, sans arriver à la hauteur des résultats d'existence et d'unicité de Pardoux et Tang [35] ou Ma et Yong [27], nous retrouvons quelques cas particuliers et surtout un contrôle à la fois plus pratique de la constante de contraction, et meilleur de la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades. En effet, on prouve ( $k_{\phi,u}$  désignant la constante de lipschitz de  $\phi$  en la variable  $u$ ) que si  $4\sqrt{3}k_{\sigma,z}k_{\Phi} < 1$ , alors premièrement il existe  $\mu > 0$  tel que  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  unique solution de (1.3) existe sur  $[T - \mu, T]$  et il existe  $C : [T - \mu, T] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telle que pour  $t \in [T - \mu, T]$ ,

$$\begin{aligned} & E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{t,x}|^2 \right] + E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{t,x}|^2 \right] + E \left[ \int_t^T |Z_r^{t,x}|^2 dr \right] \\ & \leq C(t) \left( |x|^2 + E \left[ \int_t^T f(r, 0, 0, 0)^2 dr + \int_t^T g(r, 0, 0, 0)^2 dr + \int_t^T \sigma(r, 0, 0, 0)^2 dr + \Phi(0)^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Ce résultat constitue finalement en dehors de l'approche matricielle quelque peu originale, la nouveauté majeure de cette partie. Notons également qu'elle fournit un ingrédient essentiel à la preuve du théorème principal de la partie suivante.

La **troisième partie** (chapitre 4) sera consacrée à l'étude du lien entre équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades et équations aux dérivées partielles. Comme nous l'avons vu en préambule, les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades à coefficients déterministes sont très utiles pour représenter les solutions d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 non linéaires. En effet sous des hypothèses de régularité en les coefficients à préciser, une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ku + g = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^p \\ u(T, x) = \Phi(x), \end{cases}$$

s'écrit par la formule de Feynman Kac

$$u(t, x) = E \left[ \Phi(X_T^{t,x}) \exp \left( - \int_t^T k(r, X_r^{t,x}) dr \right) + \int_t^T g(r, X_r^{t,x}) \exp \left( - \int_t^r k(u, X_u^{t,x}) du \right) dr \right]$$



où  $(X_s^{t,x})_{s \geq 0}$  désigne le processus solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_s = x + \int_t^s f(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dB_r.$$

Nous verrons toutefois que deux approches permettent de relier les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades et les équations aux dérivées partielles d'ordre 2 non linéaires. Dans le cas où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$ , ces deux approches donnent des résultats aisés à interpréter.

La première due à Ma, Protter et Yong [28] établit que si l'on suppose que les coefficients  $f, g, \sigma$  sont de classe  $C^{1,2}$  et que  $\Phi$  est de classe  $C^2$ , qu'ils ont des dérivées partielles bornées et que  $\sigma$  est non dégénéré alors la solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r) dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r \end{cases} \quad (1.4)$$

est donnée par

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, \theta(r, X_r), \sigma(r, \theta(r, X_r)) \nabla_x \theta(r, X_r)) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, \theta(r, X_r)) dB_r \\ Y_s = \theta(s, X_s) \\ Z_s = \sigma(s, X_s, \theta(s, X_s)) \nabla_x \theta(s, X_s) \end{cases}$$

où  $\theta$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m, \forall l \in \{1, \dots, m\}, \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\sigma^t \sigma)_{i,j}(t, x, \theta(t, x)) \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ + \sum_{i=1}^m f_i \left( t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)) \right) \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t, x) \\ + g \left( t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)) \right) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^m, \theta(T, x) = \Phi(x). \end{cases} \quad (1.5)$$

Réciproquement la solution  $\theta$  de (1.5) est donnée par  $\theta(t, x) = Y_t^{t,x}$  où  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  est l'unique solution adaptée de (1.4). Ces deux propriétés justifient que nous parlions d'un lien "fort et systématique".

La seconde approche due à Pardoux et Tang [35] pallie à la nécessité d'avoir des coefficients très réguliers et un coefficient de diffusion  $\sigma$  non dégénéré, mais en contrepartie les solutions obtenues ne sont plus forcément globales et ne sont plus des solutions au sens classique du terme, mais des solutions de viscosité.

Créée par Lions, Grandall en 1992 [8] pour se substituer à la notion de solution au sens des distributions lorsque celle-ci n'a pas de sens, les solutions de viscosité gardent les principales vertus de ces dernières : non seulement il s'agit bien d'une notion faible de solution, i.e. une solution au sens classique est naturellement une solution de viscosité, mais dans bien des cas il y a existence et unicité de la solution au sens de viscosité. En 1999, Pardoux et Tang prouvent donc que sous les hypothèses permettant de définir le triplet  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  solution de (1.4) (donc en général une régularité lipschitzienne à comparer à la régularité  $C^{1,2}$  de la première approche), la fonction  $u$  définie par  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  est solution de viscosité de (1.5).

L'intérêt principal de cette troisième partie est de s'intéresser plus particulièrement au cas où  $\sigma$  dépend de  $Z$ . Nous verrons que l'approche de Ma Protter et Yong s'applique également à ce cas, donnant des solutions fortes de toute une classe d'équations aux dérivées partielles, mais toujours sous de fortes conditions de régularité des coefficients et la non dégénérescence de  $\sigma$ . De plus les équations aux dérivées partielles obtenues ont l'inconvénient d'être définies de manière très implicite. Nous avons donc abordé le problème en suivant la seconde approche. Le principal résultat de cette partie, dans la lignée des résultats de Pardoux et Tang, est donc de trouver des solutions de viscosité à toute une classe d'équations aux dérivées partielles. Nous avons préféré présenter le problème sous une forme moins implicite et plus proche de l'idée de chercher une solution de l'équation aux dérivées partielles à l'aide de la solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades associé.

Plus précisément, on s'intéresse aux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{ij} M(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x))_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ \quad + \langle f(t, x, u(t, x)), \nabla u(t, x) \rangle + g(t, x, u(t, x)) = 0 \\ u(T, x) = \Phi(x) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} M : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, \\ f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ g : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

sont globalement continues,  $M$  étant de plus globalement lipschitzienne.

On verra en particulier que si  $4\sqrt{3}k_{\sigma,z}k_\Phi < 1$  et que si l'on peut trouver  $\sigma$  inversible telle que

$$\forall t, x, y, z, \quad \sigma \sigma^*(t, x, y, z) = 2M\left(t, x, y, (\sigma^*(t, x, y, z))^{-1}z\right)$$

et

$$\exists \lambda \geq 0, \quad \forall t, x, y, z, w, \quad |\sigma(t, x, y, z)^{-1}w| \leq \lambda|w|$$

alors, si l'on définit la fonction  $u$  par  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  où

$$\left\{ \begin{array}{l} X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dB_r \\ Y_s^{t,x} = \Phi(X_T^{t,x}) + \int_s^T g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dr - \int_s^T Z_r^{t,x}dB_r \end{array} \right.,$$

cette fonction  $u$  est continue et est solution de viscosité de (1.6). Remarquons pour finir que sous les deux approches, on ne peut espérer un théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades plus généraux, en partant des équations aux dérivées partielles, le lien n'étant plus systématique comme dans le cas où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$ .

Les résultats des parties 3 et 4 font l'objet d'une prépublication [1] qui a été acceptée pour publication à ESAIM/PS.

Représenter de manière probabiliste une solution d'équations aux dérivées partielles peut présenter de nombreux avantages. On peut par exemple légitimement penser pouvoir simuler la solution d'une équation aux dérivées partielles en simulant la solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades associé lorsque celle-ci existe. Par exemple, dans le cas où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$  et sous une hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ , Delarue et Menozzi [9] ont habilement profité de cette possibilité pour créer un schéma numérique efficace. Par contre, dans le cas qui nous intéresse où  $\sigma$  dépend de  $Z$ , jusqu'à maintenant aucun schéma numérique ni même de schéma de discrétisation n'existe. Aussi consacrerons nous la **quatrième et dernière partie** à étudier un schéma de discrétisation itératif. Notre schéma repose sur deux points :

- Reprenons l'application

$$\Psi^{t,x} : \begin{cases} (U, V, W) \mapsto (\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \\ \hat{U}_s = x + \int_t^s f(r, U_r, V_r, W_r)dr + \int_t^s \sigma(r, U_r, V_r, W_r)dB_r \\ \hat{V}_s = E \left[ \Phi(U_T) + \int_t^T g(r, U_r, V_r, Z_r)dr \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ \Phi(U_T) + \int_t^T g(r, U_r, V_r, W_r)dr = \\ E \left[ \Phi(U_T) + \int_t^T g(r, U_r, V_r, W_r)dr \right] + \int_t^T \hat{W}_s dB_s, \end{cases}$$

plaçons nous sous les conditions la rendant  $\rho$ -contractante pour la norme  $\|\cdot\|$  et notons  $\Theta$  le triplet  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dB_r \\ Y_s^{t,x} = \Phi(X_T^{t,x}) + \int_s^T g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr - \int_s^T Z_r^{t,x}dB_r. \end{cases}$$

D'après les conclusions de la deuxième et troisième partie, la suite  $(\Theta^n)$  définie par

$$\begin{cases} \Theta^0 = (x, \Phi(x), 0) \\ \Theta^{n+1} = \Psi^{t,x}(\Theta^n) \end{cases}$$

converge vers  $\Theta$  et

$$\|\Theta^n - \Theta\| \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|\Theta^1\|.$$

- Un des principaux intérêts de l'application  $\Psi^{t,x}$  est de découpler l'équation différentielle stochastique progressive de l'équation différentielle stochastique rétrograde et ainsi, après discrétisation, les calculs d'espérances conditionnelles sont explicites.

Plus précisément, nous considérons  $(\hat{\Theta}^n)$  processus constant par morceaux de subdivision adaptée  $\pi = (t = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T)$  par

$$\begin{cases} \hat{X}_{t_0}^{n+1} = x \\ \hat{Y}_T^{n+1} = \Phi(\hat{X}_T^{n+1}) \\ \hat{X}_{t_{i+1}}^{n+1} = \hat{X}_{t_i}^{n+1} + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n) + \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ \hat{Y}_{t_i}^{n+1} = E \left[ \hat{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] + (t_{i+1} - t_i)g(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n), \\ \hat{Z}_{t_i}^{n+1} = E \left[ \left( \hat{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} - \hat{Y}_{t_i}^{n+1} + (t_{i+1} - t_i)g(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n) \right) \frac{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}}{t_{i+1} - t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \end{cases}$$

Nous montrons alors que

$$\hat{\Theta}^{n+1} = (\Delta_\pi \circ \Psi^{t,x})(\hat{\Theta}^n)$$

où  $\Delta_\pi$  peut être considéré alors comme un opérateur de discrétisation et nous montrons que

$$\hat{\Theta}_{t_k}^{n+1} = (\hat{X}_{t_k}^{n+1}, u_{n+1,k}(\hat{X}_{t_k}^l, l \leq n+1), v_{n+1,k}(\hat{X}_{t_k}^l, l \leq n+1))$$

où les  $u_{n+1,k}$  et  $v_{n+1,k}$  s'obtiennent de manière récursive par des calculs d'intégrales.

Nous prouverons que ce schéma de discrétisation converge sur l'exemple particulier suivant :

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s AX_r dr + \int_t^s \sigma(Z_r) dB_r \\ Y_s = BX_T - \int_t^s Z_r dB_r, \end{cases}$$

les réels  $A, B$  et  $T$  étant choisis de manière à avoir  $\Psi^{t,x}$  contractante.

Plus généralement pour des coefficients  $C^1$  bornés en espace et  $1/2$  hölderiens en temps, en définissant  $(\tilde{X}^{n+1}, \tilde{Y}^{n+1}, \tilde{Z}^{n+1})$  sur  $[t_i; t_{i+1}]$ , par :

$$\begin{cases} \tilde{X}_s^{n+1} = \tilde{X}_{t_i}^{n+1} + (s - t_i)f(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n) + \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n)(B_s - B_{t_i}) \\ \tilde{Y}_s^{n+1} = \tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} + (t_{i+1} - s)g(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n) - \int_s^{t_{i+1}} \tilde{Z}_r^{n+1} dB_r, \end{cases}$$

nous verrons que si les 2 quantités

$$\mathcal{E}_1(\pi, k) = \sup_i E \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\tilde{Z}_s^k|^2 ds \right]$$

et

$$\mathcal{E}_2(\pi, k) = \sum_i E \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\tilde{Z}_s^k - \tilde{Z}_{t_i}^k|^2 ds \right]$$

tendent vers 0 à  $k$  fixé lorsque le pas de la subdivision  $|\pi|$  tend vers 0, alors on a convergence du schéma de discrétisation.



# Chapitre 2

## Les méthodes de “waveform relaxation”

Dans ce chapitre, nous introduisons une technique de convergence par itération appelée méthode de “waveform relaxation”. L’application de cette technique aux équations stochastiques différentielles progressives rétrogrades couplées - que nous étudierons dans le chapitre suivant - nous fournira les outils de base nécessaires à l’accomplissement de nos objectifs.

### 2.1 Introduction

La “waveform relaxation” a été introduite pour la première fois par Lelarasmee, Ruehli et Sangiovanni-Vincentelli [16] dans l’étude des circuits intégrés de grande taille. En effet, dans ce domaine on est fréquemment amené à devoir résoudre un système ayant un grand nombre d’inconnues (c’est ce que l’on entend par “grande taille”). L’idée des auteurs de l’article est simple : souvent un tel système peut être décomposé en de multiples sous-systèmes faiblement dépendants les uns des autres. Il est donc préférable dans ce cas de résoudre les sous-systèmes séparément en traitant les inconnues décrivant les interactions avec les autres sous-systèmes comme des données connues. En dissociant ainsi la résolution du système, non seulement on réduit la complexité du système, mais on s’offre la possibilité de traiter les calculs en parallèle ce qui peut diviser d’autant le temps nécessaire à les effectuer. Formalisons quelque peu tout cela. On cherche à résoudre un système se présentant sous la forme

$$U = \Pi(U) + G \quad (2.1)$$

sur un espace de Banach  $(\mathcal{E}, ||.||)$ .  $\Pi$  est donc une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  et  $G$  un élément de  $\mathcal{E}$  donné, et l’on cherche  $U$  dans  $\mathcal{E}$  vérifiant (2.1).

Dire que le système (2.1) se décompose en sous-systèmes consiste à supposer que  $\mathcal{E}$  s’écrit comme un produit. On supposera donc que l’on peut écrire

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_d$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $(\mathcal{E}_i, \|\cdot\|_i)$  est un espace de Banach. Le système (2.1) devient alors

$$\begin{cases} U_1 = \Pi_1(U_1, \dots, U_d) + G_1 \\ U_2 = \Pi_2(U_1, \dots, U_d) + G_2 \\ \vdots \\ U_d = \Pi_d(U_1, \dots, U_d) + G_d \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_d) \text{ avec } \Pi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i \\ U = (U_1, \dots, U_d) \text{ avec } U_i \in \mathcal{E}_i \\ G = (G_1, \dots, G_d) \text{ avec } G_i \in \mathcal{E}_i. \end{cases}$$

On cherche alors pour  $k \in \{1, \dots, d\}$ , à résoudre le système

$$U_k = \Pi_k(U_1, \dots, U_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \dots, U_d) + G_k \quad (2.2)$$

en supposant que pour  $i \neq k$ , les  $U_i$  sont connus. On étudie ainsi l'évolution du système  $k$  en considérant que l'interaction avec les autres systèmes (les  $U_i$  pour  $i \neq k$ ) est connue. Si l'interaction entre les sous-systèmes est faible, les conditions suffisantes à obtenir les  $d$  solutions  $U_1, \dots, U_d$  des  $d$  équations (2.2), suffisent à l'obtention d'une solution  $U$  de (2.1).

Pour résumer, la “waveform relaxation” s'effectue en 3 étapes :

- L'étape de décomposition

Elle consiste à trouver une représentation de  $\mathcal{E}$  en produit de sous-espaces  $(\mathcal{E}_i)_{1 \leq i \leq d}$ . On peut alors décomposer l'opérateur  $\Pi$  en  $(\Pi_1, \dots, \Pi_d)$  et  $G$  en  $(G_1, \dots, G_d)$  ce qui ramène l'équation (2.1) au système  $U_i = \Pi_i(U_1, \dots, U_d) + G_i, \forall 1 \leq i \leq d$

- L'étape de résolution

Elle consiste pour  $k \in \{1 \dots d\}$  fixé, à résoudre l'équation

$$U_k = \Pi_k(U_1, \dots, U_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \dots, U_d) + G_k$$

en l'inconnue  $U_k$ .

- L'étape de relaxation

Lors de cette étape, on cherche des conditions suffisantes à ce que la solution obtenue de manière itérative par la 2ème étape soit solution de notre équation de départ.

En pratique, 2 procédures sont couramment employées : l'itération de Gauss-Jacobi et l'itération de Gauss-Seidel. Théoriquement elles reposent sur les mêmes principes.

Commençons par la plus simple c'est à dire l'itération de Gauss-Jacobi. On considère que l'étape de décomposition est accomplie. On commence par prendre  $x^0 \in \mathcal{E}$  et on définit la suite  $(x^n)_n$  par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, x^{n+1} = \Pi(x^n) + G$$

autrement dit, par

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = \Pi_1(x_1^n, \dots, x_d^n) + G_1 \\ x_2^{n+1} = \Pi_2(x_1^n, \dots, x_d^n) + G_2 \\ \vdots \\ x_d^{n+1} = \Pi_d(x_1^n, \dots, x_d^n) + G_d. \end{cases}$$

On remarque donc qu’il s’agit d’une forme particulière d’itération de type Picard et d’une “waveform relaxation” où l’étape de résolution se fait en une seule fois, les  $d$  équations étant résolues en une seule fois.

L’itération de Gauss-Seidel, consiste dans l’étape de résolution à injecter pour  $k = 1, \dots, d$  les solutions obtenues pour les  $k - 1$  premières équations dans la  $k$ -ième équation. Cela nous donne donc

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = \Pi_1(x_1^n, \dots, x_d^n) + G_1 \\ x_2^{n+1} = \Pi_2(x_1^{n+1}, x_2^n, \dots, x_d^n) + G_2 \\ \vdots \\ x_d^{n+1} = \Pi_d(x_1^{n+1}, \dots, x_{d-1}^{n+1}, x_d^n) + G_d. \end{cases}$$

L’idée étant que plus on fait d’itérations, plus on approche de la solution réelle du système, il semble naturel de penser que la méthode de Gauss-Seidel est meilleure que celle de Gauss-Jacobi. Ce n’est pas toujours le cas, même si cela arrive fréquemment.

Nous allons voir maintenant que ces 2 itérations peuvent être étudiées suivant le même modèle théorique et sous quelles conditions elles convergent.

## 2.2 Convergence de la “waveform relaxation”

On se place dans les conditions évoquées dans la section précédente, c’est à dire que l’on suppose donné des espaces normés  $(\mathcal{E}_1, \|\cdot\|_1), \dots, (\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_d)$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_d$ . Tous ces espaces sont de plus supposés complets. On se donne également  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  que l’on pourra donc écrire  $f = (f_1, \dots, f_d)$  où  $f_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i$

Avant de donner le principal théorème décrivant la convergence de la “waveform relaxation”, nous avons besoin de quelques résultats très classiques d’analyse matricielle. Nous incluons les démonstrations mais précisons qu’elles peuvent se trouver dans de nombreuses références ([20],[39] par exemple).

**Définition 2.1** Pour  $A \in M_d(\mathbb{C})$ , on appelle spectre de  $A$  et on note  $Sp(A)$  l’ensemble des valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

On appelle rayon spectral de  $A$  le réel positif défini par

$$\rho(A) = \sup_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|.$$

**Proposition 2.2** Pour toute norme  $N$  sur  $M_d(\mathbb{C})$ , et toute matrice carrée  $A$  à coefficients complexes, de taille  $d$ , on a

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} N(A^n)^{1/n}.$$



**Démonstration.**

On prouve d’abord le résultat pour la norme  $N_0$  définie par

$$N_0(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax)|}{|x|}$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{C}^d$ . La norme  $N_0$  est alors multiplicative c’est à dire qu’elle vérifie

$$N_0(AB) \leq N_0(A)N_0(B).$$

Remarquons que pour une telle norme, on est assuré de l’existence de la limite et on sait grâce à la propriété de multiplicativité de la norme que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_0(A^n)^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} N_0(A^n)^{1/n}.$$

De plus, en considérant un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre  $\lambda$  telle que  $|\lambda| = \rho(A)$ , on obtient, pour tout entier  $n$

$$\rho(A)^n \leq N_0(A^n) \leq N_0(A)^n$$

et donc

$$\forall n, \rho(A) \leq N_0(A^n)^{1/n}.$$

Fixons maintenant  $\varepsilon > 0$ . On a alors

$$\rho\left(\frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}\right) < 1.$$

En utilisant la décomposition de Dunford de

$$A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon} = D + N$$

où  $D$  et  $N$  sont des matrices respectivement diagonale et nilpotente qui commutent, on obtient (car  $N^k = 0$  dès que  $k \geq d$ )

$$\begin{aligned} N_0(A_\varepsilon^n) &\leq N_0((D + N)^n) \\ &\leq \sum_{k=0}^d C_n^k N_0(D^{n-k}) N_0(N^k) \\ &\leq \sum_{k=0}^d C_n^k \rho(A_\varepsilon)^{n-k} N_0(N^k) \\ &\leq \rho(A_\varepsilon)^n \left( \sum_{k=0}^d C_n^k N_0(N)^k \rho(A_\varepsilon)^{-k} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_0(A_\varepsilon^n) = 0.$$

En particulier

$$\exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, N_0(A_\varepsilon^n) \leq 1$$

et donc, pour tout  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$N_0(A^n) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^n$$

ce qui entraîne que, pour tout  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$\rho(A) \leq N_0(A^n)^{1/n} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Maintenant si  $N_1$  est une norme dans  $\mathbb{C}^d$ , toutes les normes étant équivalentes en dimension finie,  $N_1$  et  $N_0$  sont équivalentes donc il existe  $C, C'$  des réels strictement positifs tels que

$$CN_0 \leq N_1 \leq C'N_0.$$

On a alors pour  $A \in M_d(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} N_1(A^n)^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} N_0(A^n)^{1/n} \\ &= \rho(A). \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.3** *L'application*

$$\rho : \begin{cases} M_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \mapsto \rho(A) \end{cases}$$

*est continue.*

**Démonstration.**

Notons  $T_d(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices complexes  $d \times d$  triangulaires supérieures. Remarquons tout d'abord que  $\rho|_{T_d(\mathbb{C})}$  est bien continue.

Soit maintenant  $(A_n)$  une suite de matrices  $d \times d$  convergeant vers  $A$  dans  $M_d(\mathbb{C})$ . On veut montrer que  $\rho(A_n)$  converge vers  $\rho(A)$ . On veut utiliser la remarque précédente en trigonalisant les matrices  $A_n$ , mais si l'on ne prend pas de précaution, on sera incapable de travailler avec les matrices de passage. On va donc trigonaliser, mais en restreignant les matrices de passage à rester dans un compact. A cette fin, on applique le théorème de Schur qui nous permet d'écrire pour  $n \geq 0$ ,

$$T_n = U_n^* A_n U_n$$

avec  $U_n$  matrice normale et  $T_n$  matrice triangulaire supérieure. On profite de la compacité des matrices normales pour montrer que la suite  $\rho(A_n)$  est bornée et admet une unique valeur d'adhérence. Cela suffira à prouver le théorème.

On considère comme dans la démonstration précédente la norme  $N_0$  définie par

$$N_0(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax)|}{|x|}$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{C}^d$ . On a

$$\rho(A_n) \leq N_0(A_n)$$

et,  $(A_n)$  étant convergente,  $(N_0(A_n))$  est une suite bornée et donc  $(\rho(A_n))$  aussi. Soit  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une extraction telle que  $\rho(A_{\phi(n)})$  converge. Par compacité des matrices normales, quitte à réextraire, on peut supposer que  $(U_{\phi(n)})$  converge vers  $U$  avec  $U$  matrice normale. Alors  $T_{\phi(n)} = U_{\phi(n)}^* A_{\phi(n)} U_{\phi(n)}$  converge et sa limite que nous noterons  $T$  est une matrice triangulaire supérieure qui vérifie de plus  $T = U^* A U$ . En particulier  $\rho(A_{\phi(n)}) = \rho(T_{\phi(n)})$  converge vers  $\rho(T)$  d’après la remarque faite en début de démonstration et comme  $\rho(T) = \rho(A)$ , on a prouvé que  $\rho(A)$  est l’unique valeur d’adhérence de la suite  $(\rho(A_n))$ .  $\square$

#### **Théorème 2.4 (Perron - Frobenius)**

*Si  $A$  est une matrice de taille  $d \geq 2$  à coefficients réels strictement positifs alors son rayon spectral  $\rho(A)$  est l’unique valeur propre de  $A$  de module maximum et l’espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur à composantes réelles strictement positives.*

#### **Démonstration.**

La démonstration se fait en plusieurs étapes et s’appuie sur le lemme suivant :

**Lemme 2.5** Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  avec  $n \geq 2$ .

S’ils vérifient l’égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

alors il existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $\forall k, z_k = |z_k| e^{i\theta}$ .

#### **Démonstration du lemme.**

On va procéder par récurrence sur  $n \geq 2$ .

**Montrons que le résultat est vrai pour  $n = 2$ .**

Soient  $z, \omega \in \mathbb{C}$ . On a

$$\begin{aligned} |z + \omega| = |z| + |\omega| &\iff |z + \omega|^2 = (|z| + |\omega|)^2 \\ &\iff |z\bar{\omega}| = \mathcal{R}(z\bar{\omega}) \\ &\iff \arg(z) \equiv \arg(\omega) [2\pi] \\ &\iff \exists \theta \in [0, 2\pi[, z = e^{i\theta}|z| \text{ et } \omega = e^{i\theta}|\omega|. \end{aligned}$$

**Supposons le résultat vrai à l'ordre  $n$**  et donnons nous  $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$  vérifiant

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

On a l'inégalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et l'hypothèse faite nous dit qu'il s'agit en fait d'une égalité. En particulier

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

et  $|u + z_{n+1}| = |u| + |z_{n+1}|$  en posant  $u = \sum_{k=1}^n z_k$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence à la première égalité, on obtient que

$$\exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall k \in \{1, \dots, n\}, z_k = e^{i\theta} |z_k|$$

et de la deuxième égalité, on déduit que

$$z_{n+1} = e^{i\theta} |z_{n+1}|.$$

□

### Retour à la démonstration de Perron-Frobenius

- Prouvons tout d'abord que  $\rho(A) > 0$ .

Remarquons que si  $\rho(A) = 0$ , alors  $\text{Trace}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda = 0$  : absurde car  $A > 0$ .

- On montre ensuite que si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  telle que  $\rho(A) = |\lambda|$  et  $e$  est vecteur propre associé, alors toutes les composantes de  $e$  sont non nulles et le vecteur  $e^*$  défini par  $e_i^* = |e_i|$  est aussi vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Par définition  $\rho(A) = \sup_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$  est atteinte. Soient donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $e \in \mathbb{C}^d - \{0\}$  tels que

$\rho(A) = |\lambda|$  et  $Ae = \lambda e$ . De plus en notant  $e^*$  le vecteur de  $(\mathbb{R}_+)^d$  tel que  $e_i^* = |e_i|$ , on a

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \rho(A)e_i^* \leq (Ae^*)_i.$$

Montrons alors qu'il existe  $j \in \{1, \dots, d\}$  tel que

$$\rho(A)e_j^* = (Ae^*)_j.$$

En effet dans le cas contraire, pour tout  $i \leq d$ , on a

$$\rho(A)e_i^* < (Ae^*)_i$$

et on peut alors trouver  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall i, (\rho(A) + \varepsilon)e_i^* \leq (Ae^*)_i$$

Par récurrence sur  $n \geq 1$ , on a alors

$$\forall i, (\rho(A) + \varepsilon)^n e_i^* \leq (A^n e^*)_i.$$

En particulier, si  $N$  désigne une norme subordonnée à  $A$  :

$$N(A) = \sup\{|(Ax)|/|x| \mid x \neq 0\}$$

où  $|\cdot|$  désigne une norme sur  $\mathbb{R}^d$ , on observe que

$$N(A^n) \geq (\rho(A) + \varepsilon)^n$$

ce qui contredit le fait que le rayon spectral est aussi défini par

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} N(A^n)^{1/n}$$

d’après la proposition 2.2. On a donc

$$\sum_{k=1}^d A_{jk}|e_k| = \left| \sum_{k=1}^d A_{jk}e_k \right|.$$

On peut ainsi appliquer le lemme 2.5 et en déduire que

$$\exists \theta \in [0, 2\pi[, \forall k \in \{1, \dots, n\}, e_k = e^{i\theta}|e_k|.$$

En particulier,  $e^*$  étant colinéaire à  $e$ ,  $e^*$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Il nous reste donc à prouver que toutes les composantes de  $e$  sont non nulles ce qui évident. En effet, si  $i \in \{1, \dots, n\}$  est tel que  $e_i = 0$  alors

$$\sum_{k=1}^d A_{ik}e_k^* = 0$$

et donc

$$\forall k \in \{1, \dots, d\}, e_k^* = 0.$$

Donc  $e^* = 0$  ce qui est absurde car  $e^*$  est un vecteur propre de  $A$ .

- On montre que  $\lambda = \rho(A)$  et que  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$  est une droite vectorielle.  
D’après ce qui précède,  $e^*$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  mais on a vu aussi qu’il existe  $j \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $\rho(A)e_j^* = (Ae^*)_j$ . On en déduit donc que  $\lambda = \rho(A)$ . Supposons maintenant par l’absurde que l’on puisse trouver 2 vecteurs propres de  $A$  indépendants  $x$  et  $y$  associés à la valeur propre  $\lambda$ . On sait d’après ce qui précède que les composantes de  $x$  et  $y$  sont non nulles. Posons  $\mu = y_1/x_1$  alors  $y - \mu x$  est aussi vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et donc  $(y - \mu x)_1 > 0$  ce qui est contradictoire.

□

**Théorème 2.6 (Théorème du point fixe de Picard)**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $f$  une application contractante sur  $X$  (i.e.  $f : X \rightarrow X$  et il existe  $c \in [0, 1[$  tel que pour tous  $x, y$  dans  $X$ ,  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ ).

On définit alors par récurrence la suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  par

$$x_0 \in X \quad \text{et} \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

On montre alors que, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq c^k d(x_1, x_0),$$

que la suite  $(x_n)$  est de Cauchy, donc converge vers  $l \in X$  unique point fixe de  $f$ .

De plus, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{1 - c^n}{1 - c} d(x_1, x_0)$$

et

$$d(x_n, l) \leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_1, x_0).$$

En particulier  $d(l, x_0) \leq \frac{d(x_1, x_0)}{1 - c}$ .

**Démonstration.**

On montre aisément par récurrence sur  $k \geq 0$  que  $d(x_{k+1}, x_k) \leq c^k d(x_1, x_0)$ .

On a de plus pour  $r \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+r}) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{p+r-1}, x_{p+r}) \\ &\leq (c^p + c^{p+1} + \cdots + c^{p+r-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq c^p (1 + c + \cdots + c^{r-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq c^p \frac{1 - c^r}{1 - c} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{c^p}{1 - c} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Cela nous prouve que la suite  $(x_n)$  est de Cauchy. En prenant  $p = 0$  et  $r = n$ , puis en passant à la limite en  $n$ , on obtient les inégalités voulues. □

Nous allons maintenant introduire quelques notations pratiques, puis établir le résultat principal de ce chapitre.

**Définition 2.7** Soit  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in M_d(\mathbb{R})$ . On dira que  $A$  est une matrice de Lipschitz de  $f$  et l'on notera  $A \in \mathcal{ML}_f$  si pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , pour tous  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{E}$  et  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathcal{E}$ , on a

$$||f_i(x_1, \dots, x_d) - f_i(y_1, \dots, y_d)||_i \leq \sum_{k=1}^d A_{ik} ||x_k - y_k||_k.$$

**Remarque 2.8** Si  $A, B \in M_d(\mathbb{R})$  avec  $A \leq B$  (i.e.  $\forall i, j, A_{ij} \leq B_{ij}$ ) et si  $A \in \mathcal{ML}_f$  alors  $B \in \mathcal{ML}_f$

**Théorème 2.9** Soit  $A \in \mathcal{ML}_f$  dont les coefficients sont strictement positifs. Si  $\rho(A) < 1$ , l'application  $f$  est contractante sur  $\mathcal{E}$  pour la norme

$$N(x) = \sum_{k=1}^d \beta_k ||x_k||_k$$

où  $\beta \in (R_*^+)^d$  est un vecteur propre à coordonnées strictement positives de  $A$  associé à la valeur propre  $\rho(A)$ .

**Démonstration.**

Par le théorème 2.4,  $\rho(A)$  est valeur propre de  $A$  et on peut considérer  $\beta \in (\mathbb{R}_+^*)^d$  vecteur propre associé. On a donc  $A\beta = \rho(A)\beta$  et donc pour  $x, y \in \mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned} N(f(x) - f(y)) &= \sum_{l=1}^d \beta_l ||f_l(x) - f_l(y)||_l \\ &\leq \sum_{l=1}^d \beta_l \left( \sum_{k=1}^d A_{lk} ||(x - y)_k||_k \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^d ||(x - y)_k||_k \left( \sum_{l=1}^d \beta_l A_{lk} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^d ||(x - y)_k||_k (\rho(A) \beta_k) \\ &\leq \rho(A) \sum_{k=1}^d \beta_k ||(x - y)_k||_k \\ &\leq \rho(A) N(x - y). \end{aligned}$$

□

Les itérations de Jacobi et de Gauss-Seidel peuvent alors s'interpréter facilement.

Pour l'étude d'une itération de Jacobi, on suppose qu'il existe  $A \in \mathcal{ML}_\Pi$  (c'est une propriété de l'opérateur  $\Pi$ ). Par le précédent théorème, si  $\rho(A) < 1$  on a donc convergence de l'itération. Nous allons maintenant montrer que l'itération de Gauss-Seidel, suit le même principe mais en faisant intervenir une autre matrice obtenue à partir de la matrice  $A$ .

En effet, écrivons  $A$  sous la forme  $A = D - E - F$  où  $D$  est la matrice diagonale constituée des coefficients diagonaux de  $A$ ,  $E$  est la matrice triangulaire inférieure stricte constituée des opposés des coefficients sous-diagonaux de  $A$ , et  $F$  la matrice triangulaire supérieure stricte constituée des opposés des coefficients sur-diagonaux de  $A$ .

Pour l'itération de Jacobi, le système itératif consiste à étudier la suite

$$X_{n+1} = (D - E - F)X_n + B.$$

On s'aperçoit que l'itération de Gauss Seidel consiste quant à elle à étudier la suite

$$X_{n+1} = (-E)X_{n+1} + (D - F)X_n + B$$

où en simplifiant et en remarquant que  $I + E$  est inversible à étudier le système

$$X_{n+1} = (I + E)^{-1}(D - F)X_n + (I + E)^{-1}B.$$

On a alors convergence de l'itération lorsque  $\rho\left((I + E)^{-1}(D - F)\right) < 1$ .





## Chapitre 3

# Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées

Cette partie sera entièrement consacrée à la présentation et à l'étude du principal thème de la thèse. Les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées (FBSDE pour Forward Backward Stochastic Differential Equations dans la littérature anglaise) ont été introduites par F. Antonelli en 1993 [2] dans le but de résoudre des problèmes issus de la finance et de la théorie du contrôle. Elles constituent une généralisation des équations stochastiques rétrogrades (BSDE pour les adeptes de la langue de Shakespeare) introduites en 1990 par Pardoux et Peng [34].

Nous verrons également qu'elles permettent de représenter de manière probabiliste toute une classe de solutions d'équations aux dérivées partielles.

D'un point de vue pédagogique et historique, il est essentiel de considérer en premier lieu les équations différentielles stochastiques rétrogrades. En effet, la plupart des techniques utilisées dans le cadre des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées en sont issues.

Ce petit détour nous permettra à la fois de les acquérir, mais aussi de faire apparaître les subtilités et difficultés que l'on doit affronter dans l'analyse du cas général.

## 3.1 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

### 3.1.1 Introduction

Comme leur nom l'indique, les équations différentielles stochastiques rétrogrades représentent l'équivalent aléatoire des équations différentielles rétrogrades. Alors que la théorie des équations différentielles stochastiques progressives peut se voir *heuristiquement* comme une adaptation de la théorie des équations différentielles progressives en remplaçant l'intégrale de Lebesgue par l'intégrale d'Itô, l'exemple suivant va nous persuader que pour une équation différentielle stochastique rétrograde, la mesurabilité joue un rôle essentiel.

Précisons tout d'abord le cadre de travail : on suppose que l'on dispose d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sur lequel on a construit un mouvement brownien  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$  prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On notera  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  sa filtration propre que l'on supposera continue à droite et complète. En particulier, par un résultat classique de loi du 0 – 1, une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable est déterministe.

On considère, pour  $T > 0$  temps terminal fixé, l'équation différentielle rétrograde dans  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = 0 & t \in [0, T[ \\ y(T) = c \end{cases}$$

où  $c$  est une constante réelle donnée. La solution existe sur  $[0, T]$ , elle est unique, il s'agit évidemment de la solution constante  $y = c$ . Quel est l'équivalent stochastique de cette très simple équation ? Le problème est maintenant de trouver un processus réel  $Y$  progressivement mesurable par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , de carré intégrable (de manière à se placer dans des conditions suffisantes à l'utilisation de l'intégrale d'Itô) vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dY_s = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\xi$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

Ici, la condition d'adaptation du processus  $Y$  entraîne que  $\xi$  doit être déterministe car si  $Y$  est solution,  $Y$  est constante, égale à  $Y_0$  et est donc  $\mathcal{F}_0$ -mesurable.

En fait, pour une condition terminale  $\xi$  donnée, le processus le plus simple et adapté que l'on puisse construire est  $Y_s = E[\xi | \mathcal{F}_s]$ . En utilisant le fait que  $Y_0 = E[\xi]$  et le théorème de représentation martingale, on voit qu'il existe un processus  $Z$  progressivement mesurable et de carré intégrable tel que

$$Y_s = \xi - \int_s^T Z_r dB_r.$$

Pour résumer, le système

$$\begin{cases} dY_s = Z_s dB_s \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (3.2)$$

possède une unique solution  $(Y, Z)$  adaptée donnée par  $Y_s = E[\xi | \mathcal{F}_s]$  et  $Z$  obtenu par le théorème de représentation martingale appliqué à  $Y$  entre 0 et  $T$ .

Le précédent système est un cas particulier très simple de ce que l'on appelle équation différentielle stochastique rétrograde et définie de la manière suivante.

On se donne  $m, d$  entiers naturels non nuls. On suppose que plus généralement le brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On désignera par  $|\cdot|$  et  $\|\cdot\|$  les normes euclidiennes dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^{m \times d}$ .

**Définition 3.1** Pour  $T > 0$  et  $\xi$  vecteur aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable dans  $\mathbb{R}^m$ , on appelle solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde  $EDSR(T, \xi, g)$ , tout couple  $(Y, Z)$  de processus progressivement mesurables à valeurs dans  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$  et de carré intégrable (les espérances  $E \left[ \int_0^T |Y_r|^2 dr \right]$  et  $E \left[ \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right]$  sont finies) vérifiant

$$Y_s = \xi + \int_s^T g(r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r. \quad (3.3)$$

Dans la définition précédente, dans un souci de clarté, nous n'avons pas émis d'hypothèses sur  $\xi$  et  $g$ . Bien évidemment, des conditions sont nécessaires afin même de pouvoir définir l'intégrale d'Itô dans (3.3). Nous préférons dans un premier temps ne pas nous apesantir dessus, des hypothèses rigoureuses seront données lorsque nous aborderons les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Nous voulons nous arrêter ici pour soulever 2 questions auxquelles la résolution de (3.1) et (3.2) permet déjà d'apporter un élément de réponse.

- L'équation (3.3) présente 2 inconnues : les processus  $Y$  et  $Z$ . Pourquoi peut-on penser pouvoir prouver des résultats d'existence et d'unicité ?
- Ce qui fait différer formellement l'équation (3.3) d'une équation différentielle stochastique progressive est la présence du processus  $Z$ . A quoi correspond-il ?

L'exemple de (3.1) et (3.2) nous apporte déjà un début de réponse à ces 2 interrogations. Tout d'abord, on a vu que la condition de mesurabilité sur le processus  $Y$  a été primordiale : elle est la cause principale de l'absence de solution de (3.1). La condition de mesurabilité constitue donc une autre contrainte, joue le rôle d'une deuxième équation.

Ensuite, c'est la présence du  $Z$  dans (3.2) qui permet à celle-ci de posséder une solution, alors que sans  $Z$ , (3.1) n'avait pas de solution. On peut interpréter cela en disant que c'est  $Z$  qui d'une certaine manière apporte la mesurabilité adéquate au processus  $Y$ .

De plus la résolution complète de (3.2) montre que dans ce cas particulier,  $Z$  est obtenu par le théorème de représentation martingale. Ce théorème classique du calcul stochastique constitue un outil majeur dans l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades, mais en incarne

également toute la complexité. Toutes les difficultés techniques que nous rencontrerons sont en grande partie dues aux maigres renseignements dont nous disposons sur ce processus.

En particulier, si l'on suppose être dans des conditions suffisantes permettant d'écrire les intégrales dans (3.3), on se persuade assez aisément que si les processus  $Y$  et  $Z$  existent,  $Y$  disposera a priori de propriétés de régularité bien supérieures à celles du processus  $Z$ .

Souvent, pour résoudre des équations différentielles stochastiques rétrogrades, les techniques les plus efficaces sont celles qui évitent d'attaquer de front le processus  $Z$  et qui parviennent à en obtenir des propriétés par des moyens détournés.

Nous allons maintenant être plus rigoureux et, tout en démontrant les résultats fondamentaux de l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades, découvrir les principaux outils nécessaires à leur résolution.

### 3.1.2 Existence, unicité et comparaison des solutions

Historiquement, Pardoux et Peng ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution de l' $EDSR(T, \xi, g)$  par itération en définissant la suite  $(Y_{n+1}, Z_{n+1})$  supposant  $(Y_n, Z_n)$  connus par

$$Y_{n+1}(s) = \xi + \int_s^T g(r, Y_n(r), Z_n(r))dr - \int_s^T Z_{n+1}(r)dB_r, \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.4)$$

Montrons tout d'abord que ce système est, à l'image du système (3.2), aisé à résoudre (si  $X_n$  et  $Y_n$  connus bien sûr !). Essayons de deviner comment définir  $Y_{n+1}$  et  $Z_{n+1}$ ... Supposons donc que  $Y_{n+1}$  et  $Z_{n+1}$  sont bien définis et vérifient le problème précédent. Alors on a

$$\xi = Y_{n+1}(0) - \int_0^T g(r, Y_n(r), Z_n(r))dr + \int_0^T Z_{n+1}(r)dB_r$$

et comme  $Y_{n+1}(0)$  est déterministe, on a

$$E[\xi] = Y_{n+1}(0) - E \left[ \int_0^T g(r, Y_n(r), Z_n(r))dr + \int_0^T Z_{n+1}(r)dB_r \right]$$

et donc

$$\xi + \int_0^T g(r, Y_n(r), Z_n(r))dr = E \left[ \xi + \int_0^T g(r, Y_n(r), Z_n(r))dr \right] + \int_0^T Z_{n+1}(r)dB_r.$$

On voit donc que  $Z_{n+1}$  peut être obtenu par le théorème de représentation martingale appliqué au vecteur aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable

$$\xi + \int_0^T g(r, Y_n(r), Z_n(r))dr$$

entre 0 et  $T$ . Il n'est ensuite pas très difficile de montrer que

$$Y_{n+1}(s) = E \left[ \xi + \int_s^T g(r, Y_n(r), Z_n(r)) dr \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

et que finalement (3.4) est bien vérifiée.

Ensuite les auteurs prouvent que pour une norme bien choisie, et sous une hypothèse de régularité de type Lipschitz sur  $g$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$  sont des processus qui convergent et leurs limites respectives  $Y$  et  $Z$  vérifient l'équation rétrograde (3.4). Même s'ils n'utilisent pas directement dans leur démonstration de théorème du point fixe, il faut reconnaître que le fil directeur de cette preuve est une itération de type point fixe.

Nous gardons l'idée d'itération de type point fixe mais, dans le but d'obtenir des démonstrations moins techniques, nous préférons dans un cadre plus général adopter la présentation du premier chapitre de [27]. Nous verrons d'ailleurs que les résultats d'existence et d'unicité utilisés dans cette thèse ne s'en éloignent guère. En particulier, le résultat d'existence et d'unicité que nous allons maintenant présenter pour une équation différentielle stochastique rétrograde se fait en 2 étapes :

- Premièrement, à l'aide d'un argument de point fixe, on prouve l'existence et l'unicité locale de la solution.
- Deuxièmement, munis d'un bon contrôle du caractère local de la première étape et en prolongeant de proche en proche, on construit une solution globale.

Même si l'idée de point fixe était sous jacente aux travaux de Pardoux et Peng, l'utilisation générale des techniques de point fixe aux équations différentielles stochastiques rétrogrades apparaît pour la première fois dans un article de F. Antonelli en 1993 [2].

Nous pouvons maintenant donner le cadre général sur lequel les résultats qui suivront s'appliquent :

On se donne donc  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité sur lequel on suppose construit un mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration naturelle du brownien dont on supposera qu'elle vérifie les conditions habituelles (c'est à dire qu'on la suppose continue à droite et complète).

Pour  $k \geq 1$ , on notera  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^k$ .

Pour  $k \geq 1$ , et  $x \in \mathbb{R}^k$ , on a donc  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ .

Pour  $p, q \geq 1$  et  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , on notera  $\|A\| = \sqrt{\text{Trace}(A^t A)}$ .

On se donne un instant terminal  $T > 0$  et une fonction

$$g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

supposée progressivement mesurable.

Avant de donner le théorème d'existence et d'unicité locale, remarquons que sous les hypothèses nécessaires à définir les intégrales stochastiques dans (3.4) et si  $(Y, Z)$  est solution, alors

$Z$  sera de carré intégrable,  $Y$  sera de carré intégrable et presque sûrement continue. On considère donc les 2 espaces suivants :

$$\mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d}) = \left\{ \begin{array}{l} X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d} \text{ progressivement mesurable} \\ \text{et tel que } E \left[ \int_0^T \|X(s)\|^2 ds \right] < +\infty \end{array} \right\}$$

et

$$\mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) = \left\{ \begin{array}{l} X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ continu progressivement mesurable} \\ \text{et tel que } E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X(s)|^2 \right] < +\infty \end{array} \right\}.$$

Notons que,  $\mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d})$  muni de la norme  $\sqrt{E \left[ \int_0^T \|X(s)\|^2 ds \right]}$  et  $\mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d)$  muni de la norme  $\sqrt{E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |X(s)|^2 \right]}$  sont des espaces de Banach. On considère sur  $\mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d})$  la norme suivante :

$$\|(U, V)\|_0 = \sqrt{E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |U(s)|^2 \right] + E \left[ \int_0^T \|V(s)\|^2 ds \right]}.$$

On peut alors énoncer (en suivant [27] p19) les deux théorèmes suivants qui établissent, en supposant le coefficient  $g$  lipschitzien, que l' $EDSR(\xi, T, g)$  possède une unique solution adaptée. Le premier le prouve localement (pour  $T$  suffisamment petit), le second donne un résultat global (pas d'hypothèse sur  $T$ ).

**Théorème 3.2** *Supposons que*

- $\xi \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur aléatoire  $\mathcal{F}_T$  mesurable et  $E[|\xi|^2] < +\infty$ ,
- 

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \text{ p.s. } \forall t \in [0, T], \forall y, y' \in \mathbb{R}^m, \forall z, z' \in \mathbb{R}^{m \times d}, \\ |g(t, y, z) - g(t, y', z')| \leq C(|y - y'| + \|z - z'\|) \end{aligned} \quad (3.5)$$

- $E \left[ \int_0^T |g(r, 0, 0, 0)|^2 dr \right] < +\infty$ .

Alors il existe  $T_0 > 0$  tel que pour  $T \leq T_0$ , l'équation

$$Y_s = \xi + \int_s^T g(r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r$$

possède une unique solution  $(Y, Z)$  dans  $\mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d})$ .

**Démonstration.**

Nous allons dans un premier temps supposer que  $d$  et  $m$  sont égaux à 1, pour simplifier l'écriture de la preuve. Nous signalerons ensuite comment régler le cas général.

On constate que  $\mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d}) \times \mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_0$  est un espace de Banach.

Si on considère l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d}) \rightarrow \mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d}) \\ (U, V) \mapsto (Y, Z) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} dY_s = -g(s, U_s, V_s)ds + Z_s dB_s & t \leq s \leq T, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

on se persuade que rechercher une solution unique de l'équation équivaut à trouver un point fixe à  $\Psi$ .

De manière à évaluer  $\|\Psi(U', V') - \Psi(U, V)\|_0$  pour  $(U, V), (U', V') \in \mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d})$ , il est plus pratique de noter  $(Y, Z) = \Psi(U, V)$  et  $(Y', Z') = \Psi(U', V')$  et de souligner que l'on peut également définir  $\Psi$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} Y(s) = E \left[ \xi + \int_s^T g(r, U(r), V(r)) dr \middle| \mathcal{F}_s \right], \\ \xi + \int_0^T g(r, U(r), V(r)) dr = E \left[ \xi + \int_0^T g(r, U(r), V(r)) dr \right] + \int_0^T Z(r) dB_r. \end{cases}$$

$Z$  est donc obtenu par le théorème de représentation martingale. On a en particulier,

$$Y(s) - Y'(s) = E \left[ \int_s^T \left( g(r, U(r), V(r)) - g(r, U'(r), V'(r)) \right) dr \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

et donc

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |Y(s) - Y'(s)|^2 \right] \\ \leq E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} E \left[ \int_0^T |g(r, U(r), V(r)) - g(r, U'(r), V'(r))| dr \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

Mais

$$M_s = E \left[ \int_0^T |g(r, U(r), V(r)) - g(r, U'(r), V'(r))| dr \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

est une martingale, donc par l'inégalité de Doob,

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |Y(s) - Y'(s)|^2 \right] &\leq 4E \left[ \left( \int_0^T |g(r, U(r), V(r)) - g(r, U'(r), V'(r))| dr \right)^2 \right] \\ &\leq 4C^2 E \left[ \left( \int_0^T |U(r) - U'(r)| dr + \int_0^T \|V(r) - V'(r)\| dr \right)^2 \right] \\ &\leq 8C^2 T E \left[ \int_0^T |U(r) - U'(r)|^2 dr + \int_0^T \|V(r) - V'(r)\|^2 dr \right] \\ &\leq 8C^2 \sup(1, T) T \|(U - U', V - V')\|_0^2. \end{aligned}$$



De plus,

$$\int_0^T (Z_r - Z'_r) dB_r = \int_0^T (g(r, U(r), V(r)) - g(r, U'(r), V'(r))) dr + Y_0 - Y'_0$$

donc

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^T |Z_r - Z'_r|^2 dr \right] \\ \leq 2E \left[ \left( \int_0^T (g(r, U(r), V(r)) - g(r, U'(r), V'(r))) dr \right)^2 \right] + 2E [|Y_0 - Y'_0|^2]. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|\Psi(U, V) - \Psi(U', V')\|_0^2 \leq 20C^2 \sup(1, T)T \|(U - U', V - V')\|_0^2.$$

Finalement, si on choisit  $T_0$  suffisamment petit de manière à avoir  $20C^2 \sup(1, T_0)T_0 < 1$ , l'application  $\Psi$  est alors contractante et on en déduit le résultat annoncé. La démonstration pour  $d, m \geq 1$  s'obtient alors en utilisant les relations suivantes valables pour  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et  $Z \in \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d})$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x|^2 = \sum_{i=0}^k |x_i|^2 \\ \left| \int_0^T f(r) dr \right| \leq \int_0^T |f(r)| dr \\ E \left[ \left| \int_0^T Z_r dB_r \right|^2 \right] = E \left[ \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right]. \end{array} \right.$$

□

### Remarque 3.3

- a) Nous avons dans un souci de clarté pris volontairement l'origine des temps à  $t = 0$ , mais la preuve précédente est flexible et pour un  $T > 0$  fixé, l'équation différentielle stochastique rétrograde (3.4) possède une unique solution sur  $]T - T_0, T]$ . On a donc ce que l'on a nommé un théorème d'existence et d'unicité local.
- b) La condition  $20C^2 \sup(1, T_0)T_0 < 1$  définissant  $T_0$  nous donne un contrôle effectif de la durée de vie minimale de la solution. En particulier elle ne dépend pas de l'instant terminal  $T$ , mais juste de la constante de Lipschitz  $C$  de la fonction  $g$ . Cette dernière remarque est essentielle à la démonstration du théorème d'existence et d'unicité globale dans l'accomplissement de la 2ème étape.

En effet pour passer outre cette hypothèse de localité en temps, il suffit de faire le raisonnement suivant : On peut considérer d'après la remarque a), la solution  $(Y_1, Z_1)$  de l'EDSR( $T, \xi, g$ ) sur

$[T - T_0/2, T]$ . En appliquant de nouveau le théorème à l' $EDSR(T - T_0/2, Y_1(T - T_0/2), g)$ , on en obtient l'unique solution  $(Y_2, Z_2)$  sur  $[T - T_0, T - T_0/2]$ . On remarque alors que  $(Y, Z)$  définis par

$$(Y, Z) = \begin{cases} (Y_1, Z_1) \text{ sur } [T - T_0/2, T] \\ (Y_2, Z_2) \text{ sur } [T - T_0, T - T_0/2], \end{cases}$$

est solution de l' $EDSR(T, \xi, g)$  sur  $[T - T_0, T]$ . De plus l'unicité locale sur  $[T - T_0/2, T]$  et  $[T - T_0, T - T_0/2]$  permet d'obtenir sans difficulté l'unicité sur  $[T - T_0, T]$ . Par la remarque b), la durée de vie des solutions est au moins supérieure ou égale à  $T_0$  indépendant de  $T$ , en particulier elle ne tend pas vers 0 lorsque  $T$  tend vers 0, on peut donc répéter le raisonnement de proche en proche jusqu'à atteindre l'instant 0. On obtient alors le théorème suivant :

**Théorème 3.4** *Supposons que*

- $\xi \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur aléatoire  $\mathcal{F}_T$  mesurable et  $E[|\xi|^2] < +\infty$ ,
- $\exists C > 0$ , ps  $\forall t \in [0, T], \forall y, y' \in \mathbb{R}^m, \forall z, z' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,

$$|g(t, y, z) - g(t, y', z')| \leq C(|y - y'| + \|z - z'\|),$$

- $E \left[ \int_0^T |g(r, 0, 0, 0)|^2 dr \right] < +\infty$ .

Alors l'équation  $Y_s = \xi + \int_s^T g(r, Y_r, Z_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r$  possède une unique solution  $(Y, Z)$  dans  $\mathcal{M}_T^c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d})$ .

L'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades et des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades s'accompagne généralement de l'analyse de la dépendance des solutions par rapport aux paramètres des équations. On espère en effet, si celle-ci est fructueuse, pouvoir passer par exemple à la limite sur les paramètres que ce soit pour assouplir les hypothèses sur les coefficients ou pour obtenir des propriétés de continuité. Pour les équations rétrogrades, on s'intéresse donc à comparer les solutions de l' $EDSR(\xi, g)$  aux solutions de l' $EDSR(\xi', g')$ . D'après [27] p17, on a

**Théorème 3.5** *Supposons que*

- $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^m$  sont des vecteurs aléatoires  $\mathcal{F}_T$  mesurables et tels que  $E[|\xi|^2]$  et  $E[|\xi'|^2]$  soient finies,
- $g$  et  $g'$  sont progressivement mesurables,
- $\exists C > 0$ , ps  $\forall t \in [0, T], \forall y, y' \in \mathbb{R}^m, \forall z, z' \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,

$$\begin{aligned} |g(t, y, z) - g(t, y', z')| &\leq C(|y - y'| + \|z - z'\|) \\ |g'(t, y, z) - g'(t, y', z')| &\leq C(|y - y'| + \|z - z'\|) \end{aligned}$$

- $E \left[ \int_0^T (|g(r, 0, 0, 0)|^2 + |g'(r, 0, 0, 0)|^2) dr \right] < +\infty$ .

D'après le théorème précédent, on peut considérer  $(Y, Z)$  et  $(Y', Z')$  les solutions respectives sur  $[0, T]$  de l'EDSR  $(T, \xi, g)$  et l'EDSR  $(T, \xi', g')$ .

Il existe alors une constante  $K$  telle que

$$\|(Y - Y', Z - Z')\|_0^2 \leq K \left\{ E[|\xi - \xi'|^2] + E \left[ \int_0^T |g(s, Y_s, Z_s) - g'(s, Y_s, Z_s)|^2 ds \right] \right\}.$$

**Démonstration.**

On applique la formule d'Itô à  $|Y - Y'|^2$ , en notant  $\langle, \rangle$  le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^m$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} |Y_s - Y'_s|^2 + \int_s^T \|Z_r - Z'_r\|^2 dr \\ = |\xi - \xi'|^2 - 2 \int_s^T \langle Y_r - Y'_r, g(r, Y_r, Z_r) - g'(r, Y'_r, Z'_r) \rangle dr \\ - 2 \int_s^T \langle Y_r - Y'_r, (Z_r - Z'_r) dB_r \rangle. \end{aligned}$$

Notons  $\tilde{g}(r) = g(r, Y_r, Z_r) - g'(r, Y'_r, Z'_r)$ . Par l'hypothèse sur  $g, g'$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons que

$$\begin{aligned} \left| \int_s^T \langle Y_r - Y'_r, g(r, Y_r, Z_r) - g'(r, Y'_r, Z'_r) \rangle dr \right| \\ \leq \int_s^T |Y_r - Y'_r| \left( |\tilde{g}(r)| + C(|Y_r - Y'_r| + \|Z_r - Z'_r\|) \right) dr. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |Y_s - Y'_s|^2 + \int_s^T \|Z_r - Z'_r\|^2 dr \\ \leq |\xi - \xi'|^2 + \int_s^T \left[ (1 + 2C + 4C^2)|Y_r - Y'_r|^2 + \frac{1}{2}\|Z_r - Z'_r\|^2 + |\tilde{g}(r)|^2 \right] dr \\ - 2 \int_s^T \langle Y_r - Y'_r, (Z_r - Z'_r) dB_r \rangle. \end{aligned}$$

Après passage à l'espérance, nous avons

$$\begin{aligned} E[|Y_s - Y'_s|^2] + \frac{1}{2} E \left[ \int_s^T \|Z_r - Z'_r\|^2 dr \right] \\ \leq E[|\xi - \xi'|^2] + E \left[ \int_s^T |\tilde{g}(r)|^2 dr \right] + (1 + 2C + 4C^2) E \left[ \int_s^T |Y_r - Y'_r|^2 dr \right]. \end{aligned}$$

Enfin en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$E \left[ |Y_s - Y'_s|^2 + \int_s^T \|Z_r - Z'_r\|^2 dr \right] \leq K \left\{ E \left[ |\xi - \xi'|^2 + \int_s^T |\tilde{g}(r)|^2 dr \right] \right\}. \quad (3.6)$$

Mieux, par l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, on obtient

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{s \in [0, T]} |Y_s - Y'_s|^2 \right] &\leq K \left\{ E \left[ |\xi - \xi'|^2 + \int_0^T |\tilde{g}(r)|^2 dr \right] \right\} \\ &\quad + 2E \left[ \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_t^T < Y_s - Y'_s, (Z_s - Z'_s) dB_s > \right| \right] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{s \in [0, T]} |Y_s - Y'_s|^2 \right] &\leq K \left\{ E \left[ |\xi - \xi'|^2 + \int_0^T |\tilde{g}(r)|^2 dr \right] \right\} \\ &\quad + K' \sqrt{E \left[ \sup_{s \in [0, T]} |Y_s - Y'_s|^2 \right]} \sqrt{E \left[ \int_0^T \|Z_s - Z'_s\|^2 ds \right]}. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , on montre que

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{s \in [0, T]} |Y_s - Y'_s|^2 \right] &\leq K \left\{ E \left[ |\xi - \xi'|^2 + \int_0^T |\tilde{g}(r)|^2 dr \right] \right\} \\ &\quad + K' E \left[ \int_0^T \|Z_s - Z'_s\|^2 ds \right] \end{aligned}$$

et par (3.6), on obtient le résultat.  $\square$

**Proposition 3.6** *Sous les hypothèses du théorème 3.4, si  $(Y, Z)$  est solution de l'EDSR( $T, \xi, g$ ), on a*

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s|^2 \right] + E \left[ \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right] \leq K \left\{ E[|\xi|^2] + E \left[ \int_0^T |g(r, 0, 0)|^2 dr \right] \right\}$$

**Démonstration.**

On utilise la formule d'Itô appliquée à  $|Y|^2$  :

$$|Y_s|^2 + \int_s^T \|Z_r\|^2 dr = |\xi|^2 - 2 \int_s^T < Y_r, g(r, Y_r, Z_r) > dr - 2 \int_s^T < Y_r, Z_r dB_r > .$$

Par hypothèse sur  $g$  et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| \int_s^T < Y_r, g(r, Y_r, Z_r) > dr \right| &\leq \int_s^T |Y_r| \left( |g(r, Y_r, Z_r)| + C|Y_r| + C\|Z_r\| \right) dr \\ &\leq \int_s^T |Y_r| \left( |g(r, 0, 0)| + 2C|Y_r| + 2C\|Z_r\| \right) dr. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de procéder comme dans la démonstration du théorème précédent.  $\square$

A l'image des équations différentielles déterministes qui sont explicitement résolubles lorsque les coefficients sont linéaires, l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires est fortement simplifiée.

**Proposition 3.7** *Considérons l'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire suivante :*

$$Y_s = \xi + \int_s^T (U_r + \alpha_r Y_r + \langle \beta_r, Z_r \rangle) dr + \int_s^T Z_r dB_r$$

où le processus  $(U_s)_{s \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^m)$  et les processus  $(\alpha_s)_{s \in [0, T]}$  et  $(\beta_s)_{s \in [0, T]}$  sont progressivement mesurables et bornés.

Notons

$$\Gamma_{s,t} = \exp \left( \int_s^t (\alpha_r - \frac{1}{2} |\beta_r|^2) dr + \int_s^t \beta_r dB_r \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} Y_s &= \Gamma_{s,t} Y_t + \int_s^t \Gamma_{s,r} U_r dr - \int_s^t \Gamma_{s,r} (Z_r + Y_r \beta_r) dB_r \\ &= E \left( \Gamma_{s,t} Y_t + \int_s^t \Gamma_{s,r} U_r dr \middle| \mathcal{F}_s \right) \end{aligned}$$

### Démonstration.

La formule d'Itô nous donne

$$\Gamma_{s,t} Y_t = \Gamma_{s,s} Y_s + \int_s^t \Gamma_{s,r} dY_r + \int_s^t Y_r d\Gamma_{s,r} + \langle \Gamma_{s,r}, Y_r \rangle_s^t.$$

En remarquant ensuite que

$$d\Gamma_{s,r} = \Gamma_{s,r} \alpha_r dr + \Gamma_{s,r} \beta_r dB_r$$

et

$$dY_r = -(\alpha_r Y_r + \langle \beta_r, Z_r \rangle + U_r) dr + Z_r dB_r,$$

la première égalité se déduit aisément.

La dernière égalité est alors immédiate après conditionnement.  $\square$

Un exemple particulièrement intéressant d'équations différentielles stochastiques rétrogrades est obtenu lorsque la condition finale  $\xi$  s'écrit  $\Phi(X_T)$  où le processus  $X$  vérifie une équation différentielle stochastique progressive

$$X_s = x + \int_t^s f(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dB_r.$$

En effet, comme on l'a déjà souligné dans l'introduction, lorsque les coefficients sont déterministes, le système obtenu permet d'avoir une représentation probabiliste des solutions d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles.

La théorie développée précédemment s'applique sans problèmes, on ajoute juste aux hypothèses déjà prises les conditions permettant de définir le processus  $X$  sur  $[0, T]$ .

Il semble donc naturel maintenant de s'intéresser à un système plus "compliqué" où l'équation différentielle stochastique progressive et l'équation différentielle rétrograde sont fortement liées.

## 3.2 Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées

On s'intéresse donc dorénavant à un système du type

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r)dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r, \quad t \leq s \leq T \end{cases} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{cases} f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ g : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \sigma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times d}, \\ \Phi : \Omega \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m \end{cases}$$

et donc  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{m \times d}$ .

### 3.2.1 Particularités du cas $\sigma$ dépendant de $z$

Dans le but de souligner les caractéristiques particulières du système (3.7) lorsque  $\sigma$  dépend de  $z$ , il est intéressant à ce stade de s'arrêter quelques instants sur le cas où les coefficients sont déterministes et où  $\sigma = \sigma(t, x, y)$  ne dépend pas de sa dernière composante. L'étude de ces équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades a été notablement éclairci par les travaux de Pardoux, Tang, Ma, Yong et Delarue ([35],[28],[27],[10] pour n'en citer que quelques uns). Nous allons maintenant essayer d'en illustrer les particularités.

Lorsque  $\sigma$  ne dépend plus de sa dernière composante, le système (3.7) devient alors

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r)dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r, \quad t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (3.8)$$

Le système (3.8) que nous noterons  $EDSPR(t, T, f, g, \sigma, \Phi)$  pour en faire ressortir la dépendance en les paramètres, présente 3 propriétés particulièrement remarquables.

- (i) On peut démontrer comme pour les équations différentielles stochastiques justes rétrogrades qu'on a existence et unicité locale de la solution  $(X, Y, Z)$ . Cela se fait également par un argument de point fixe, et l'on retrouvera cette technique de démonstration dans le cas général.
- (ii) On dispose également, comme pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades, de résultats de stabilité des solutions de 2 systèmes différents en fonction de leurs paramètres. Pour être plus précis, on peut comparer lorsqu'elles existent les solutions respectives de  $EDSPR(t, T, f', g', \sigma', \Phi')$  et  $EDSPR(t, T, f, g, \sigma, \Phi)$ .
- (iii) Ma, Protter et Yong ont prouvé dans un article de 1994 [28] que, sous de fortes hypothèses de régularité sur les coefficients de (3.8) (des hypothèses en partie nécessaires à l'application de la formule d'Itô) et pour  $\sigma$  non dégénéré, le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (3.8) est fortement lié à l'équation aux dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^p, \forall l \in \{1, \dots, m\}, \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p (\sigma^t \sigma)_{i,j}(t, x, \theta(t, x)) \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ + \sum_{i=1}^p f_i \left( t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)) \right) \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t, x) \\ + g \left( t, x, \theta(t, x), \nabla_x \theta(t, x) \sigma(t, x, \theta(t, x)) \right) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^p, \theta(T, x) = \Phi(x). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Plus précisément, ils montrent que si les coefficients  $f, g, \sigma$  sont de classe  $C^{1,2}$  et  $\Phi$  de classe  $C^2$ , si leurs dérivées partielles sont bornées et sous une hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ , alors l'équation aux dérivées partielles (3.9) admet une unique solution. On peut alors définir pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $X^{t,x}$  l'unique solution sur  $[t, T]$  de l'équation différentielle stochastique

$$U_s = x + \int_t^s f(r, U_r, \theta(r, U_r), \theta(r, U_r), \nabla_x \theta(r, U_r) \sigma(r, U_r, \theta(r, U_r))) dr + \int_t^s \sigma(r, U_r, \theta(r, U_r)) dB_r.$$

Ils établissent alors, ce qui constitue le lien entre (3.8) et (3.9) que

$$(X_s^{t,x}, \theta(s, X_s^{t,x}), \nabla_x \theta(s, X_s^{t,x}) \sigma(s, X_s^{t,x}, \theta(s, X_s^{t,x})))$$

est l'unique solution de (3.8) sur  $[t, T]$ .

Maintenant le plus impressionnant est que disposant de (ii) et (iii), on peut étendre le résultat (i) d'existence et d'unicité locale (résultat dû à Delarue dans [10]) à un théorème d'existence et

unicité globale. Même si la preuve peut être considérée comme technique, les idées qui la gouvernent sont finalement simples et limpides. En effet, par exemple pour l'existence globale tout comme dans le cas plus simple d'une équation différentielle stochastique rétrograde, on aimerait appliquer l'argument de prolongement de la solution (2ème étape de la preuve du théorème 3.4). Deux détails techniques s'interposent alors. En effet considérons d'après (i)  $(X, Y, Z)$  la solution de (3.8) sur  $[T - \delta, T]$ . Pour pouvoir réappliquer (i) en  $T - \delta$ , 2 conditions sont nécessaires

- a)  $Y_{T-\delta}$  doit non seulement pouvoir s'écrire  $Y_{T-\delta} = \Phi_{T-\delta}(X_{T-\delta})$  mais si c'est la cas,  $\Phi_{T-\delta}$  doit être lipschitzienne.
- b)  $\delta$  doit être contrôlé c'est à dire qu'il faut pouvoir le minorer indépendamment de  $T$ .

On voit que si les coefficients de (3.8) sont réguliers et sous une hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ , d'après (iii) on a bien  $Y_{T-\delta} = \Phi_{T-\delta}(X_{T-\delta})$  où  $\Phi_{T-\delta} = \theta(T - \delta, \cdot)$ . De plus, le caractère lipschitzien et la condition b) se traduisent alors par le comportement de  $\nabla\theta$  que des résultats d'analyse indépendants peuvent prédire. On prouve ainsi que  $\delta$  ne tend pas vers 0 quand  $T$  varie. Dans le cas général, en approchant les coefficients lipschitziens de (3.8) par des coefficients réguliers et en utilisant les résultats de comparaison évoqués par (ii), on peut passer à la limite et obtenir l'existence globale sous des hypothèses lipschitziennes sur les coefficients de (3.8) et une hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ .

Signalons que cette dernière condition est ici primordiale pour passer d'une propriété locale à une propriété globale. En effet, considérons l'exemple dû à Antonelli [2] :

$$\begin{cases} X_t = 1 + \int_0^t X_s ds + \int_0^t |Y_s| ds \\ Y_t = 1 + \int_t^T (X_s + Y_s) ds - \int_t^T Z_r dB_r, \end{cases} \quad (3.10)$$

et supposons que  $(X, Y, Z)$  en soit une solution sur  $[0, T]$ .

Par la formule d'Itô appliquée à  $f(s, X_s) = e^{-s}X_s$  entre 0 et  $t$ , on obtient

$$X_t = e^t \left( 1 + \int_0^t e^{-s} |Y_s| ds \right).$$

De même, par la formule d'Itô appliquée à  $f(s, Y_s) = e^{-(T-s)}Y_s$  entre  $t$  et  $T$ , puis passage à l'espérance conditionnelle,

$$Y_t = E \left[ e^{T-t} + \int_t^T e^{s-t} X_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

En particulier,  $X$  et  $Y$  sont strictement positifs et donc  $(X, Y, Z)$  est solution du système

$$\begin{cases} X_t = 1 + \int_0^t (X_s + Y_s) ds \\ Y_t = 1 + \int_t^T (X_s + Y_s) ds - \int_t^T Z_r dB_r. \end{cases}$$



On en déduit que  $E[X_t + Y_t] = 2 + \int_0^T E[X_s + Y_s]ds$  est une constante strictement positive  $\beta$  qui vérifie  $\beta = 2 + T\beta$  et donc  $T < 1$ .

Ainsi, sur cet exemple où  $\sigma = 0$  est dégénéré, il n'existe pas de solution à (3.10) pour  $T \geq 1$ .

Mais qu'advient il lorsque  $\sigma$  dépend de  $z$  ?

Prenons par exemple la propriété (i). Nous allons montrer au travers d'un exemple fort simple que l'on ne peut espérer avec uniquement une condition de régularité lipschitzienne sur les coefficients, obtenir un résultat d'existence et d'unicité même local. En effet, considérons le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$(\mathcal{E}_T) \quad \begin{cases} X_s = \int_0^s Z_r dB_r \\ Y_s = X_T - \int_s^T Z_r dB_r. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de se rendre compte qu'il n'y a pas unicité des solutions de  $(\mathcal{E}_T)$ . En fait, l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}_T)$  sur  $[0, T]$  est

$$\left\{ \left( \int_0^s Z_r dB_r, \int_0^s Z_r dB_r, Z_s \right)_{s \in [0, T]}, Z \in \mathcal{M}_T(\mathbb{R}^{m \times d}) \right\}$$

et cela aussi petit  $T$  soit il.

Nous verrons dans la partie suivante que, pour obtenir existence et unicité d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades dont le coefficient  $\sigma$  dépend de  $z$ , on devra rajouter une hypothèse dont le rôle sera d'une certaine manière de contrôler la dépendance de  $\sigma$  en  $z$ .

Si l'on s'intéresse à la propriété (ii), malheureusement les astuces de calcul stochastique permettant de comparer simultanément les 3 composantes des solutions de 2 systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades telles que (3.8) ne sont plus efficaces, du moins dans un cadre suffisamment général.

De plus, et cela sera le thème principal du chapitre suivant, relier une solution de (3.7) à une équation aux dérivées partielles ne pourra se faire de manière aussi systématique que pour les systèmes (3.8). En effet, on verra ultérieurement dans le cas où  $\sigma$  dépend de  $z$ , qu'on ne sait prouver un tel lien que pour des systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades dont le coefficient  $\sigma$  vérifie certaines propriétés. En passant par les équations aux dérivées partielles, on ne peut donc résoudre les systèmes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades dans toute leur généralité.

Enfin, la spécificité de l'hypothèse de non dégénérescence sur le coefficient  $\sigma$  évoquée précédemment, n'a plus lieu d'être lorsque  $\sigma$  dépend de  $z$ .

Nous nous proposons de souligner cette affirmation au travers de l'exemple suivant :

$$\begin{cases} X_s = \int_0^s X_r dr + \int_0^s (1 + |Z_r|) dB_r \\ Y_s = \frac{1}{2} X_T - \int_s^T Z_r dB_r. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ici  $\sigma = \sigma(z) = 1 + |z|$  est lipschitzien et non dégénéré, cependant la solution de (3.11) n'est définie que pour  $T \leq \ln 2$ . En effet, pour  $T \leq \ln 2$  on a  $\frac{1}{2}e^T \leq 1$  et on peut donc définir  $z : ]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $z(r)$  point fixe de l'application  $x \mapsto \frac{1}{2}e^{T-r}(1 + |x|)$ .

On vérifie alors que

$$\begin{cases} X_s = e^s \int_0^s e^{-r} (1 + |z_r|) dB_r \\ Y_s = \frac{1}{2} e^T \int_0^s e^{-r} (1 + |z_r|) dB_r \\ Z_s = z_s \end{cases} \quad (3.12)$$

est solution de (3.11).

Réciproquement, supposons que  $(X, Y, Z)$  soit solution de (3.11) sur  $[0, T]$ .

En appliquant la formule d'Itô à  $F(r, X_r) = e^{-r} X_r$  entre 0 et  $s$ , on obtient

$$X_s = \int_0^s e^{s-r} (1 + |Z_r|) dB_r$$

donc comme  $Y_s = E[\frac{1}{2} X_T | \mathcal{F}_s]$ , on obtient également

$$Y_s = \frac{1}{2} e^T \int_0^s e^{-r} (1 + |Z_r|) dB_r = \frac{1}{2} e^{T-s} X_s.$$

Maintenant, en appliquant la formule d'Itô entre  $T$  et  $s$  à  $F(r, X_r) = \frac{1}{2} e^{T-r} X_r$ , on obtient

$$Y_T - Y_s = \int_s^T \frac{1}{2} e^{T-r} (1 + |Z_r|) dB_r.$$

Donc

$$Z_r = \frac{1}{2} e^{T-r} (1 + |Z_r|) \quad ps.$$

Finalement, pour  $T \leq \ln 2$ , le système (3.11) admet une unique solution donnée par les formules (3.12). De plus pour  $T > \ln 2$ , si (3.11) admet une unique solution  $(X, Y, Z)$ , on a

$$Z_r = \frac{1}{2} e^{T-r} (1 + |Z_r|) \quad ps.$$

Cependant cette équation n'a pas de solution sur un voisinage ouvert de  $r = 0$ . En effet, en notant  $T = \ln 2 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ , on a alors

$$Z_r = e^{\varepsilon-r} (1 + |Z_r|) \quad ps.$$

Ce qui est absurde pour  $r \in [0, \varepsilon]$  car pour  $\alpha \geq 1$ , l'équation  $x = \alpha(1 + |x|)$  n'a pas de solution. En conclusion, le système (3.11) admet une unique solution sur  $[0, T]$  si et seulement si  $T \leq \ln 2$ .

### 3.2.2 Existence et unicité locale des solutions

#### A] Résultats existants

La partie précédente nous a explicitement montré que, même sous des hypothèses de régularité lipschitzienne sur les coefficients, on ne peut espérer prouver sans autre hypothèse que, localement, il existe une unique solution au système (3.7).

Cette question a déjà fait l'objet d'une étude approfondie de la part de Pardoux et Tang [35], Ma et Yong [27] ou Peng et Wu [37]. Nous ne prétendons pas proposer de meilleur résultat, mais une approche plus adaptée à nos besoins, en particulier pour la discrétisation et la résolution des équations aux dérivées partielles. On verra en particulier que notre apport ne se situe pas sur la question de l'existence et de l'unicité, mais plutôt sur des inégalités de contrôle des solutions et des questions de continuité.

C'est pourquoi il nous semble opportun de rappeler maintenant les résultats d'existence et d'unicité les plus généraux obtenus jusqu'à présent. Signalons toutefois, que nous n'évoquerons pas les travaux de Peng et Wu dans ce domaine, les hypothèses qu'ils adoptent étant trop éloignées des nôtres.

L'étude la plus complète sur le sujet est certainement à mettre à l'actif de l'article de Pardoux et Tang [35]. Rappelons en les principales conclusions.

On se donne des fonctions

$$\begin{aligned} f &: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ g &: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \sigma &: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times d}, \\ \Phi &: \Omega \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

vérifiant

- (A1)  $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, \quad ps$   
 $\langle f(t, x_1, y, z) - f(t, x_2, y, z), x_1 - x_2 \rangle \leq \lambda_1 |x_1 - x_2|^2$   
 $\langle g(t, x, y_1, z) - g(t, x, y_2, z), y_1 - y_2 \rangle \leq \lambda_2 |y_1 - y_2|^2$
- (A2)  $\exists k, k_1, k_2, k_3, k_4 > 0, \quad \forall t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1, z_2, \quad ps$   
 $|f(t, x, y_1, z_1) - f(t, x, y_2, z_2)| \leq k_1 |y_1 - y_2| + k_2 \|z_1 - z_2\|,$   
 $|f(t, x, y, z)| \leq |f(t, 0, y, z)| + k(1 + |x|),$   
 $|g(t, x_1, y, z_1) - g(t, x_2, y, z_2)| \leq k_3 |x_1 - x_2| + k_4 \|z_1 - z_2\|,$   
 $|g(t, x, y, z)| \leq |g(t, x, 0, z)| + k(1 + |y|),$
- (A3)  $\exists k_5, k_6, k_7 > 0, \quad \forall t, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \quad ps$   
 $\|\sigma(t, x_1, y_1, z_1) - \sigma(t, x_2, y_2, z_2)\|^2 \leq k_5^2 |x_1 - x_2|^2 + k_6^2 |y_1 - y_2|^2 + k_7^2 \|z_1 - z_2\|^2$
- (A4)  $\exists k_8 > 0, \quad \forall x, \quad ps \quad |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq k_8 |x_1 - x_2|$
- (A5) Les processus  $f(\cdot, x, y, z)$  et  $g(\cdot, x, y, z)$  sont  $\mathcal{F}_t$  adaptés, et la variable aléatoire  $\Phi(x)$  est  $\mathcal{F}_T$  mesurable, pour tout  $(x, y, z)$ . De plus

$$E \left[ \int_0^T |f(s, 0, 0, 0)|^2 ds + |g(s, 0, 0, 0)|^2 + \int_0^T \|\sigma(s, 0, 0, 0)\|^2 ds + |\Phi(0)|^2 \right] < +\infty.$$

On cherche alors à résoudre le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (3.7) partant de l'instant 0 :

$$\begin{cases} X_s = x + \int_0^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_0^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r)dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq s \leq T. \end{cases} \quad (3.13)$$

**Théorème 3.8** *Supposons que les hypothèses (A1) jusqu'à (A5) sont vérifiées.*

*Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  dépendant de  $k_3, k_4, k_5, k_8, \lambda_1, \lambda_2, T$  tel que si  $k_1, k_2, k_6, k_7 \in [0, \varepsilon_0]$ , alors il existe une unique solution adaptée  $(X, Y, Z)$  du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (3.13).*

*De plus, si  $\lambda_1 + \lambda_2 < -(k_5^2 + k_4^2)/2$ , il existe  $\varepsilon_1 > 0$  dépendant de  $k_3, k_4, k_5, k_8, \lambda_1, \lambda_2$  mais plus de  $T$  tel que pour  $k_1, k_2, k_6, k_7 \in [0, \varepsilon_1]$ , il existe une unique solution adaptée  $(X, Y, Z)$  du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (3.13).*

Pour être complet, il est nécessaire d'examiner le contrôle que l'on obtient alors sur la solution et les hypothèses nécessaires à son obtention :

**Théorème 3.9** *Supposons que les hypothèses (A1) jusqu'à (A5) sont vérifiées.*

*Si de plus,  $k_7 = 0$  (ce qui nous limite à  $\sigma$  ne dépendant pas de  $Z$ ) et si pour  $i = 1, 3, 4$ , il existe  $C_i > 0$  avec  $C_4 < k_4^{-1}$ ,  $\theta > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que*

$$\lambda_1 + \lambda_2 < -\frac{1}{2} \left\{ (1 + \alpha) \left[ k_1 C_1 + k_6^2 + \frac{k_2^2}{\alpha(1 - k_4 C_4)} \right] (k_8^2 + \frac{k_3 C_3}{\theta}) + k_1 C_1^{-1} + k_3 C_3^{-1} + k_4 C_4^{-1} + k_5^2 + \theta \right\}$$

*alors il existe une constante  $K$  dépendant des  $k_i$  pour  $i = 1, \dots, 8$  et de  $\lambda_1, \lambda_2, T$  telle que*

$$\begin{aligned} & E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t)|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds \right] \\ & \leq K \left( |x|^2 + E \left[ |\Phi(0)|^2 + \int_0^T (|f(t, 0, 0, 0)|^2 + |g(t, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(t, 0, 0, 0)\|^2) dt \right] \right) \end{aligned}$$

Comme on le voit, ces résultats en privilégiant des hypothèses minimales sur les coefficients (la monotonie des coefficients  $f$  et  $g$  par exemple dans (A1)) offrent au final des conclusions finalement peu aisées à interpréter. Il peut être plus avantageux d'avoir un résultat moins exhaustif mais plus compréhensible. Dans ce but et car il a plus de points communs avec les résultats que nous emploierons, nous donnons le théorème d'existence et d'unicité de Ma et Yong [27].

**Théorème 3.10** *Supposons que les coefficients  $f, g, \Phi$  et  $\sigma$  sont globalement lipschitziens en espace et de carré intégrable. Considérons  $L_0$  et  $L_1$  les réels positifs tels que*

$$\begin{cases} |\sigma(t, x, y, z) - \sigma(t, x, y, z')| \leq L_0 \|z - z'\|, \\ \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m, \forall z, z' \in \mathbb{R}^{m \times d}, \forall t \geq 0, \text{ p.s.} \\ |\Phi(x) - \Phi(x')| \leq L_1 |x - x'|, \quad \forall (x, x') \in \mathbb{R}^p, \text{ p.s.} \end{cases}$$

et  $L_0 L_1 < 1$ .

Alors il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T \in ]0, T_0]$  et tout  $x \in \mathbb{R}^p$ , le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (3.13) possède une unique solution adaptée sur  $[0, T]$ .

## B] Résultats utilisés ici

Maintenant, nous allons présenter les résultats d'existence et d'unicité sur lesquels va s'appuyer le reste de la thèse. En comparaison des résultats précédents, ils ne sont pas meilleurs au sens où les hypothèses que nous ferons sont plus fortes, par contre ils sont numériquement mieux contrôlables et nous permettent en outre une estimation de la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades lorsque, dans celui-ci,  $\sigma$  dépend de  $z$ , estimation que les résultats existants n'obtenaient pas.

Comparativement aux théorèmes du paragraphe précédent, on va supposer que les coefficients  $f, g, \sigma, \Phi$  sont globalement lipschitziens en lieu et place des hypothèses (A1), (A2) et (A3). De manière à ce que la signification des constantes soit plus explicite, on va réécrire toutes les hypothèses admises.

**(H1)** Pour  $\phi = f, g, \sigma$ ,  $\exists k_{\phi, x}, k_{\phi, y}, k_{\phi, z} \geq 0$  tels que, p.s.,  $\forall r, x, y, z \in [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ ,

$$|\phi(r, x, y, z) - \phi(r, x', y', z')| \leq k_{\phi, x} |x - x'| + k_{\phi, y} |y - y'| + k_{\phi, z} \|z - z'\|.$$

**(H2)**  $\exists k_{\Phi} \geq 0$  tel que, p.s.,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ ,  $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq k_{\Phi} |x - y|$ .

**(H3)** Pour  $\phi = f, g, \sigma$ , on a  $\forall r \in [0, T], \forall x, y, z \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ ,  $\phi(r, x, y, z)$  est  $\mathcal{F}_r$ -mesurable.

$\forall x \in \mathbb{R}^p$ ,  $\Phi(x)$  est  $\mathcal{F}_T$  mesurable. De plus

$$E \left[ \int_0^T (|f(r, 0, 0, 0)|^2 + |g(r, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2) dr + \|\Phi(0)\|^2 \right] < +\infty.$$

On voit en particulier que sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on peut définir

$$\Psi^{t,x} : \begin{cases} \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d}) \rightarrow \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d}) \\ (U, V, W) \mapsto (X, Y, Z) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} dX_s = f(s, U_s, V_s, W_s) ds + \sigma(s, U_s, V_s, W_s) dB_s \\ dY_s = -g(s, U_s, V_s, W_s) ds + Z_s dB_s \\ X_t = x \\ Y_T = \Phi(X_T). \end{cases}$$

et

$$\mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d}) = \left\{ \begin{array}{l} X : \Omega \times [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d} \text{ progressivement mesurable} \\ \text{et tel que } E \left[ \int_t^T \|X(s)\|^2 ds \right] < +\infty \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m) = \left\{ \begin{array}{l} X : \Omega \times [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continu progressivement mesurable} \\ \text{et tel que } E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X(s)|^2 \right] < +\infty \end{array} \right\}.$$

Notons pour  $\theta \in \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m)$ ,

$$\|\theta\|_1 = \sqrt{E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |\theta_s|^2 \right]}$$

et pour  $\theta \in \mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d})$ ,

$$\|\theta\|_2 = \sqrt{\int_t^T E(\|\theta_s\|^2) ds}.$$

Les espaces  $(\mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_1)$  et  $(\mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d}), \|\cdot\|_2)$  sont alors complets.

Comme le laisse prévoir la terminologie utilisée, notre théorème d'existence et d'unicité s'appuie sur le théorème du point fixe de Picard. A la différence de F. Antonelli qui fut le premier à l'appliquer aux équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, nous allons jouer sur la décomposition canonique en produit de l'espace

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d})$$

et en tirer profit au travers des résultats du chapitre 2.

Pour être plus précis, sous une condition simple à vérifier nous allons construire une norme sur  $\mathcal{M}$  pour laquelle l'application  $\Psi^{t,x}$  sera contractante. L'avantage de cette méthode n'est pas dans le résultat brut d'existence et d'unicité auquel elle conduit, mais plutôt la majoration que l'on obtient sur la constante de contraction. En effet, celle-ci se trouve étroitement liée au rayon spectral d'une matrice de taille 3 et la dépendance en les coefficients du système d'équations différentielles progressives rétrogrades y est explicite. Signalons pour finir, que le choix des normes n'est pas anodin, elles permettent non seulement d'avoir des espaces complets mais participeront grandement à la possibilité d'évaluer efficacement la solution dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire  $\sigma$  dépendant de  $z$ .

Les résultats du chapitre précédent nous donnent donc,

**Proposition 3.11** *En utilisant les notations de la définition 2.7, considérons la matrice*

$$A(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

où

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}\sqrt{T-t}\sqrt{(T-t)k_{f,x}^2 + 4k_{\sigma,x}^2} \\ \sqrt{6}\sqrt{T-t}\sqrt{(T-t)k_{f,y}^2 + 4k_{\sigma,y}^2} \\ \sqrt{6}\sqrt{(T-t)k_{f,z}^2 + 4k_{\sigma,z}^2} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6}\sqrt{T-t}\sqrt{2k_{\Phi}^2((T-t)k_{f,x}^2 + 4k_{\sigma,x}^2) + (T-t)k_{g,x}^2} \\ 2\sqrt{6}\sqrt{T-t}\sqrt{2k_{\Phi}^2((T-t)k_{f,y}^2 + 4k_{\sigma,y}^2) + (T-t)k_{g,y}^2} \\ 2\sqrt{6}\sqrt{2k_{\Phi}^2((T-t)k_{f,z}^2 + 4k_{\sigma,z}^2) + (T-t)k_{g,z}^2} \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{6(T-t)}\sqrt{(T-t)(k_{g,x}^2 + 2k_{\Phi}^2k_{f,x}^2) + 8k_{\Phi}^2k_{\sigma,x}^2} \\ \sqrt{6(T-t)}\sqrt{(T-t)(k_{g,y}^2 + 2k_{\Phi}^2k_{f,y}^2) + 8k_{\Phi}^2k_{\sigma,y}^2} \\ \sqrt{6}\sqrt{(T-t)(k_{g,z}^2 + 2k_{\Phi}^2k_{f,z}^2) + 8k_{\Phi}^2k_{\sigma,z}^2} \end{pmatrix}.$$

On a alors  $A(t) \in \mathcal{ML}_{\Psi^{t,x}}$

### Démonstration.

Tout comme dans la démonstration du théorème 3.4, la preuve qui suit n'est parfaitement valable que pour  $p, m$  et  $d$  égaux à 1. Les inégalités finales sont par contre tout à fait exactes dans le cas général. Rappelons juste que pour étendre la démonstration au cas  $p, m$  et  $d \geq 1$ , on utilise le bon choix des normes euclidiennes au travers des propriétés :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^k, & |x|^2 = \sum_{i=0}^k |x_i|^2 \\ E \left[ \left| \int_0^T Z_r dB_r \right|^2 \right] = E \left[ \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right]. \end{cases}$$

Pour  $(U, V, W), (U', V', W') \in \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{M}_{t,T}(\mathbb{R}^{m \times d})$ , on notera

$$\begin{cases} (X, Y, Z) = \Psi^{t,x}(U, V, W) \\ (X', Y', Z') = \Psi^{t,x}(U', V', W') \\ \Delta X = X - X' \\ \Delta Y = Y - Y' \\ \Delta Z = Z - Z' \\ \Delta U = U - U' \\ \Delta V = V - V' \\ \Delta W = W - W'. \end{cases}$$

- Tout d'abord, on vérifie que pour  $t \leq s \leq T$ ,

$$\begin{aligned} (X_s - X'_s) &= \int_t^s \left[ f(u, U_u, V_u, W_u) - f(u, U'_u, V'_u, W'_u) \right] du \\ &\quad + \int_t^s \left[ \sigma(u, U_u, V_u, W_u) - \sigma(u, U'_u, V'_u, W'_u) \right] dB_u \\ &= \int_t^s \Delta f_u du + \int_t^s \Delta \sigma_u dB_u. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant l'inégalité  $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ , nous obtenons

$$\sup_{t \leq s \leq T} |X_s - X'_s|^2 \leq 2 \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left| \int_t^s \Delta f_u du \right|^2 + \sup_{t \leq s \leq T} \left| \int_t^s \Delta \sigma_u dB_u \right|^2 \right].$$

En prenant l'espérance dans l'inégalité précédente, nous avons

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s - X'_s|^2 \right] \leq 2E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left| \int_t^s \Delta f_u du \right|^2 \right] + 2E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left| \int_t^s \Delta \sigma_u dB_u \right|^2 \right]$$

puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Doob, nous obtenons

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s - X'_s|^2 \right] \leq 2(T-t)E \left[ \int_t^T |\Delta f_u|^2 du \right] + 8E \left[ \left| \int_t^T \Delta \sigma_u dB_u \right|^2 \right].$$

En utilisant l'expression de la variance d'une intégrale stochastique pour le second terme, nous avons l'estimation suivante :

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s - X'_s|^2 \right] \leq 2(T-t)E \left[ \int_t^T |\Delta f_u|^2 du \right] + 8E \left[ \int_t^T \|\Delta \sigma_u\|^2 du \right].$$

Rappelons les hypothèses de Lipschitz pour  $f$  et  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} |\Delta f_u| &\leq k_{f,x} |\Delta U_u| + k_{f,y} |\Delta V_u| + k_{f,z} \|\Delta W_u\|, \\ |\Delta \sigma_u| &\leq k_{\sigma,x} |\Delta U_u| + k_{\sigma,y} |\Delta V_u| + k_{\sigma,z} \|\Delta W_u\|, \end{aligned}$$

ce qui conduit aux majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |\Delta f_u|^2 &\leq 3k_{f,x}^2 |\Delta U_u|^2 + 3k_{f,y}^2 |\Delta V_u|^2 + 3k_{f,z}^2 \|\Delta W_u\|^2, \\ |\Delta \sigma_u|^2 &\leq 3k_{\sigma,x}^2 |\Delta U_u|^2 + 3k_{\sigma,y}^2 |\Delta V_u|^2 + 3k_{\sigma,z}^2 \|\Delta W_u\|^2. \end{aligned}$$

En reportant ces majorations dans (1) nous obtenons

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s - X'_s|^2 \right] &\leq (6(T-t)k_{f,x}^2 + 24k_{\sigma,x}^2) E \left[ \int_t^T |\Delta U_u|^2 du \right] \\ &\quad + (6(T-t)k_{f,y}^2 + 24k_{\sigma,y}^2) E \left[ \int_t^T |\Delta V_u|^2 du \right] \\ &\quad + (6(T-t)k_{f,z}^2 + 24k_{\sigma,z}^2) E \left[ \int_t^T \|\Delta W_u\|^2 du \right] \\ &\leq 6(T-t) \left( (T-t)k_{f,x}^2 + 4k_{\sigma,x}^2 \right) \|\Delta U\|_1^2 \\ &\quad + 6(T-t) \left( (T-t)k_{f,y}^2 + 4k_{\sigma,y}^2 \right) \|\Delta V\|_1^2 \\ &\quad + 6(T-t) \left( (T-t)k_{f,z}^2 + 4k_{\sigma,z}^2 \right) \|\Delta W\|_2^2. \end{aligned}$$



On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\|\Delta X\|_1 &\leq \sqrt{6(T-t)((T-t)k_{f,x}^2 + 4k_{\sigma,x}^2)} \cdot \|\Delta U\|_1 \\ &\quad + \sqrt{6(T-t)((T-t)k_{f,y}^2 + 4k_{\sigma,y}^2)} \cdot \|\Delta V\|_1 \\ &\quad + \sqrt{6((T-t)k_{f,z}^2 + 4k_{\sigma,z}^2)} \cdot \|\Delta W\|_2,\end{aligned}$$

ce qui donne la première colonne  $C_1$  de la matrice  $A$ .

- Ensuite, en remarquant que pour  $t \leq s \leq T$ ,

$$Y_s - Y'_s = \Phi(X_T) - \Phi(X'_T) + \int_s^T [g(u, U_u, V_u, W_u) - g(u, U'_u, V'_u, W'_u)] du - \int_s^T (Z_u - Z'_u) dB_u$$

mais aussi par  $\mathcal{F}_s$ -mesurabilité de  $Y_s - Y'_s$ , nous avons

$$\begin{aligned}Y_s - Y'_s &= E[\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) | \mathcal{F}_s] \\ &\quad + E \left[ \int_s^T [g(u, U_u, V_u, W_u) - g(u, U'_u, V'_u, W'_u)] du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E[\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) | \mathcal{F}_s] + E \left[ \int_s^T \Delta g_u du \middle| \mathcal{F}_s \right].\end{aligned}$$

Donc, toujours à l'aide de l'inégalité  $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ ,

$$|Y_s - Y'_s|^2 \leq 2 \left( |E[\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) | \mathcal{F}_s]|^2 + \left| E \left[ \int_s^T \Delta g_u du \middle| \mathcal{F}_s \right] \right|^2 \right).$$

On a donc

$$\sup_{t \leq s \leq T} |Y_s - Y'_s|^2 \leq 2 \left( \sup_{t \leq s \leq T} |E[\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) | \mathcal{F}_s]|^2 + \sup_{t \leq s \leq T} \left| E \left[ \int_s^T \Delta g_u du \middle| \mathcal{F}_s \right] \right|^2 \right).$$

Or,  $E[\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) | \mathcal{F}_s]$  est une martingale donc, par l'inégalité de Doob, on a

$$\begin{aligned}E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |Y_s - Y'_s|^2 \right] \\ \leq 2 \left( 4E[|\Phi(X_T) - \Phi(X'_T)|^2] + E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left| E \left[ \int_s^T \Delta g_u du \middle| \mathcal{F}_s \right] \right|^2 \right] \right).\end{aligned}$$

Puis, comme

$$\begin{aligned}\left| E \left[ \int_s^T \Delta g_u du \middle| \mathcal{F}_s \right] \right|^2 &\leq E \left[ \left| \int_s^T \Delta g_u du \right|^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &\leq E \left[ \int_s^T |\Delta g_u|^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right],\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Doob à la martingale  $E \left[ \int_t^T |\Delta g_u| du \middle| \mathcal{F}_s \right]$ , on obtient que

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} E \left[ \int_s^T \Delta g_u du \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 \right] &\leq 4E \left[ \left( \int_t^T |\Delta g_u| du \right)^2 \right] \\ &\leq 4(T-t)E \left[ \int_t^T |\Delta g_u|^2 du \right]. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |Y_s - Y'_s|^2 \right] &\leq 8E \left[ |\Phi(X_T) - \Phi(X'_T)|^2 \right] + 8(T-t)E \left[ \int_t^T |\Delta g_u|^2 du \right] \\ &\leq 24(T-t)E \left[ \int_t^T (k_{g,x}^2 |\Delta U_u|^2 + k_{g,y}^2 |\Delta V_u|^2 + k_{g,z}^2 \|\Delta W_u\|^2) du \right] \\ &\quad + 8k_\Phi^2 \|\Delta X\|_1^2 \\ &\leq 24(T-t)^2 (k_{g,x}^2 \|\Delta U\|_1^2 + k_{g,y}^2 \|\Delta V\|_1^2) + 24(T-t)k_{g,z}^2 \|\Delta W\|_2^2 \\ &\quad + 8k_\Phi^2 \|\Delta X\|_1^2. \end{aligned}$$

En utilisant la majoration précédemment obtenue de  $\|\Delta X\|_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |Y_s - Y'_s|^2 \right] &\leq \left( 24(T-t) [2k_\Phi^2 ((T-t)k_{f,x}^2 + 4k_{\sigma,x}^2) + (T-t)k_{g,x}^2] \right) \cdot \|\Delta U\|_1^2 \\ &\quad + \left( 24(T-t) [2k_\Phi^2 ((T-t)k_{f,y}^2 + 4k_{\sigma,y}^2) + (T-t)k_{g,y}^2] \right) \cdot \|\Delta V\|_1^2 \\ &\quad + \left( 24 [2k_\Phi^2 ((T-t)k_{f,z}^2 + 4k_{\sigma,z}^2) + (T-t)k_{g,z}^2] \right) \cdot \|\Delta W\|_2^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne la deuxième colonne  $C_2$  de  $A$ .

- Pour finir, on déduit de l'égalité

$$(Y_T - Y'_T) - (Y_t - Y'_t) = - \int_t^T \Delta g_r dr + \int_t^T (Z_r - Z'_r) dB_r$$

que

$$\int_t^T (Z_r - Z'_r) dB_r = (Y_T - Y'_T) - E[Y_T - Y'_T | \mathcal{F}_t] + E \left[ \int_t^T \Delta g_r dr \middle| \mathcal{F}_t \right] - \int_t^T \Delta g_r dr$$

et donc

$$\begin{aligned}
E \left[ \int_t^T \|Z_s - Z'_s\|^2 ds \right] &\leq 2E \left[ \left| (Y_T - Y'_T) - E[Y_T - Y'_T | \mathcal{F}_t] \right|^2 \right] \\
&\quad + 2E \left[ \left| \int_t^T \Delta g_r dr - E \left[ \int_t^T \Delta g_r dr | \mathcal{F}_t \right] \right|^2 \right] \\
&\leq 2E \left[ |Y_T - Y'_T|^2 \right] + 2E \left[ \left| \int_t^T \Delta g_r dr \right|^2 \right] \\
&\leq 2k_\Phi^2 E \left[ |X_T - X'_T|^2 \right] + 2E \left[ \left| \int_t^T \Delta g_r dr \right|^2 \right] \\
&\leq 2k_\Phi^2 \|\Delta X\|_1^2 + 2(T-t) E \left[ \int_t^T |\Delta g_r|^2 dr \right] \\
&\leq 2k_\Phi^2 \|\Delta X\|_1^2 + 6(T-t)^2 k_{g,x}^2 \|\Delta U\|_1^2 \\
&\quad + 6(T-t)^2 k_{g,y}^2 \|\Delta V\|_1^2 + 6(T-t) k_{g,z}^2 \|\Delta W\|_2^2 \\
&\leq 6(T-t) \left( (T-t)(k_{g,x}^2 + 2k_\Phi^2 k_{f,x}^2) + 8k_\Phi^2 k_{\sigma,x}^2 \right) \cdot \|\Delta U\|_1^2 \\
&\quad + 6(T-t) \left( (T-t)(k_{g,y}^2 + 2k_\Phi^2 k_{f,y}^2) + 8k_\Phi^2 k_{\sigma,y}^2 \right) \cdot \|\Delta V\|_1^2 \\
&\quad + 6 \left( (T-t)(k_{g,z}^2 + 2k_\Phi^2 k_{f,z}^2) + 8k_\Phi^2 k_{\sigma,z}^2 \right) \cdot \|\Delta W\|_2^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc la dernière colonne  $C_3$  de  $A$ .

□

Remarquons que  $t \mapsto A(t)$  est continue et que

$$A(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{6}k_{\sigma,z} & 8\sqrt{3}k_\Phi k_{\sigma,z} & 4\sqrt{3}k_\Phi k_{\sigma,z} \end{pmatrix}$$

dont le rayon spectral est  $4\sqrt{3}k_\Phi k_{\sigma,z}$ .

On dispose alors de 2 types de résultats d'existence et d'unicité.

**Théorème 3.12** *Sous les hypothèses (H1),(H2),(H3) et si  $\rho(A(t)) < 1$  (par exemple, si “ $k_{f,\bullet}$ ,  $k_{g,\bullet}$ ,  $k_{\sigma,\bullet}$  et  $k_\Phi$  sont petits”), le système  $EDSPR(t, T, f, g, \sigma, \Phi)$  admet une unique solution sur  $[t, T]$  que l'on notera  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$ .*

**Démonstration.**

Comme on le verra dans la démonstration suivante, on peut se ramener au cas où  $A$  est une

matrice à coefficients strictement positifs. D'après le théorème 2.9 du chapitre 2, l'application  $\Psi^{t,x}$  est contractante pour une certaine norme.  $\square$

**Théorème 3.13** *Sous les hypothèses (H1),(H2),(H3) et la condition*

$$(*) \quad 4\sqrt{3}k_{\Phi}k_{\sigma,z} < 1,$$

*il existe  $\mu > 0$  (ne dépendant que de  $k_{\Phi}$  et  $k_{\sigma,z}$ ) tel que pour  $t \in [T - \mu, T]$ , le système  $EDSPR(t, T, f, g, \sigma, \Phi)$  admet une unique solution que l'on notera  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$ . De plus, il existe  $C : [T - \mu, T] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telle que pour  $t \in [T - \mu, T]$ ,*

$$\begin{aligned} & E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{t,x}|^2 \right] + E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{t,x}|^2 \right] + E \left[ \int_t^T \|Z_r^{t,x}\|^2 dr \right] \\ & \leq C(t) \left( |x|^2 + E \left[ \int_t^T (|f(r, 0, 0, 0)|^2 + |g(r, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2) dr + |\Phi(0)|^2 \right] \right) \end{aligned}$$

**Démonstration.**

On aimerait appliquer le théorème 2.9 du chapitre précédent à l'application  $\Psi^{t,x}$  et la matrice  $A(t)$ , mais cette dernière n'étant pas à coefficients strictement positifs, on la "shifte" de manière infinitésimale. Plus précisément, considérons

$$A_t^{\varepsilon} = A(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_T^{\varepsilon} = A(T).$$

Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et la condition (\*),  $\rho(A(T)) < 1$ . Comme  $\rho$  est continue dans  $M_3(\mathbb{R})$ ,  $\exists \varepsilon_0 > 0$  tel que  $\rho(A_T^{\varepsilon_0}) < 1$ . On a de plus

$$\lim_{t \rightarrow T} A_t^{\varepsilon_0} = A_T^{\varepsilon_0}$$

donc  $\exists \mu > 0$  tel que pour  $t \in [T - \mu, T]$ ,  $\rho(A_t^{\varepsilon_0}) < 1$ . On peut appliquer le théorème 2.9 du chapitre précédent à l'application  $\Psi^{t,x}$  et la matrice  $A_t^{\varepsilon_0}$ . On en déduit qu'il existe  $\alpha, \beta, \gamma$  applications à valeurs strictement positives telles que si

$$N(x, y, z) = \alpha(t)\|x\|_1 + \beta(t)\|y\|_1 + \gamma(t)\|z\|_2,$$

alors

$$N(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x}) \leq \frac{N(\Psi^{t,x}(0, 0, 0))}{1 - \rho(A_t^{\varepsilon_0})}.$$

Notons  $(X^0, Y^0, Z^0) = \Psi^{t,x}(0, 0, 0)$ , c'est à dire

$$\begin{cases} X_s^0 = x + \int_t^s f(r, 0, 0, 0)dr + \int_t^s \sigma(r, 0, 0, 0)dB_r \\ Y_s^0 = \Phi(X_T^0) + \int_s^T g(r, 0, 0, 0)dr - \int_s^T Z_r^0 dB_r. \end{cases}$$

On a alors  $N(\Psi^{t,x}(0, 0, 0)) = \alpha(t)\|X^0\|_1 + \beta(t)\|Y^0\|_1 + \gamma(t)\|Z^0\|_2$ .

Or par des calculs analogues à ceux de la démonstration de la proposition 3.11, on montre qu'il existe des constantes strictement positives  $C_1, C_2, C_3$  telles que

$$\begin{cases} \|X^0\|_1^2 \leq C_1(T)M(t, x) \\ \|Y^0\|_1^2 \leq C_2(T, k_\Phi)M(t, x) \\ \|Z^0\|_2^2 \leq C_3(T, k_\Phi)M(t, x) \end{cases}$$

où

$$M(t, x) = \left( |x|^2 + E \left[ \int_t^T (|f(r, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2 + |g(r, 0, 0, 0)|^2) dr + |\Phi(0)|^2 \right] \right).$$

Il existe donc une constante strictement positive  $C$  ne dépendant que de  $T$  et  $k_\Phi$  telle que

$$N(\Psi^{t,x}(0, 0, 0)) \leq \sup(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))C\sqrt{M(t, x)}$$

On en déduit facilement que

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{t,x}|^2 \right] + E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |Y_s^{t,x}|^2 \right] + E \left[ \int_t^T \|Z_r^{t,x}\|^2 dr \right] \leq C(t)M(t, x)$$

où

$$C(t) = \frac{C^2 \sup(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))^2}{(1 - \rho(A_t^{\varepsilon_0}))^2 \inf(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))^2}.$$

□

### Remarque 3.14

a) L'inégalité obtenue dans ce théorème, est un résultat nouveau dans le cas où  $\sigma$  dépend de  $z$ . Il permettra également d'établir un lien entre certaines équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades et les équations aux dérivées partielles, ce que nous traiterons plus en détail au prochain chapitre. Si on y ajoute la visibilité sur la constante de contraction obtenue et les applications que cela entraînera pour l'étude de la discrétisation, nous pensons que la présentation de notre théorème d'existence et d'unicité est tout à fait justifiée.

b) Le choix de la norme  $\|\cdot\|_1$  et de l'espace  $\mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}^m)$  était justifié par la nécessité d'avoir un espace complet et d'obtenir une inégalité dans le théorème 3.13 suffisamment forte. En utilisant les résultats de Pardoux et Tang ou Ma et Yong pour l'existence et l'unicité, on peut obtenir la variante suivante :

Si

$$(**) \quad 2\sqrt{3}k_\Phi k_{\sigma,z} < 1,$$

il existe  $\mu > 0$  et  $C : [T - \mu; T] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telle que pour  $t \in [T - \mu, T]$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq s \leq T} E[|X_s^{t,x}|^2] + \sup_{t \leq s \leq T} E[|Y_s^{t,x}|^2] + E\left[\int_t^T \|Z_r^{t,x}\|^2 dr\right] \\ \leq C(t) \left( |x|^2 + E\left[\int_t^T (|f(r, 0, 0, 0)|^2 dr + |g(r, 0, 0, 0)|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2) dr + |\Phi(0)|^2 \right] \right). \end{aligned}$$

Cette inégalité étant suffisante aux applications aux équations aux dérivées partielles, il nous semble utile de le signaler.



# Chapitre 4

## Equations aux dérivées partielles

Notre but est d'exprimer la solution d'une équation aux dérivées partielles en termes probabilistes, c'est à dire de décrire cette solution avec du vocabulaire probabiliste et en utilisant de préférence des techniques probabilistes.

Afin de présenter le lien entre les équations aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques rétrogrades d'une part, les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades d'autre part, nous allons étudier l'exemple plus simple des équations aux dérivées partielles linéaires. Notre présentation les concernant étant loin d'être exhaustive, nous invitons le lecteur à se référer à [12] et [22] pour de plus amples détails.

On garde le cadre général du chapitre précédent. On dispose donc d'un entier  $d \geq 1$  fixé, d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , d'un mouvement brownien défini sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et de la filtration usuelle du brownien. Pour tous  $m, p$  entiers naturels strictement positifs, on notera toujours  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{m \times p}$  pouvant aussi être vue comme une norme matricielle.

### 4.1 Equations aux dérivées partielles linéaires, formule de Feynman- Kac

Intéressons nous tout d'abord pour  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé à l'équation de la chaleur dans  $\mathbb{R}^p$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p.$$

L'interprétation probabiliste de la solution de cette équation peut se résumer à la proposition suivante :



**Proposition 4.1** Soient  $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u$  solution bornée et continue sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p$  de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u & \text{sur } ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p \\ u(0, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Alors pour tout  $(t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p$ ,

$$u(t, x) = E_x[\Phi(B_t)]$$

où  $E_x$  signifie qu'en prenant l'espérance, on suppose que le brownien part de  $x$  au temps  $t = 0$ .

**Démonstration.**

La formule d'Itô appliquée à  $M_s = u(t - s, B_s)$  nous permet d'écrire que

$$M_s = M_0 + \int_0^s \left[ \left( -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta u \right)(t - r, B_r) \right] dr + \int_0^s \nabla u(t - r, B_r) dB_r$$

et donc  $M_s = u(t - s, B_s)$  est une martingale bornée.

En particulier,  $u(t, x) = E_x[M_0] = E_x[M_t] = E_x[\Phi(B_t)]$ . □

De plus, réciproquement, on a

**Proposition 4.2** Si  $\Phi$  est continue et vérifie la condition

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sup(0, \ln |\Phi(x)|)}{|x|^2} = 0,$$

alors  $v$  définie sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p$  par  $v(t, x) = E_x[\Phi(B_t)]$  est solution de l'équation de la chaleur.

**Démonstration.**

Avec les hypothèses prises, on peut appliquer les théorèmes de Lebesgue pour dériver sous l'espérance. □

Les techniques de martingales, de martingales exponentielles et de changement de probabilité via le théorème de Girsanov, conduisent à la généralisation suivante, connue sous le nom d'équations de Feynman-Kac.

**Proposition 4.3** *Donnons nous des fonctions*

$$\begin{aligned} f &: [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \sigma &: [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times d} \end{aligned}$$

*vérifiant*

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| &\leq K\|x - y\| \\ \|f(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 &\leq K^2(1 + \|x\|) \end{aligned}$$

*pour tous  $0 \leq t \leq T$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  et où  $K$  est une constante positive.*

*On peut alors considérer  $(X^{t,x})$  le processus stochastique solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$X_s = x + \int_t^s f(r, X_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r)dB_r.$$

*On se donne*

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \\ g : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \\ k : [0, T] \times \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty[ \end{cases}$$

*continues et telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$ ,*

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &\leq L(1 + \|x\|^2) \\ |g(t, x)| &\leq L(1 + \|x\|^2) \end{aligned}$$

*où  $L$  est une constante strictement positive.*

*Alors si  $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^p)$ , vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \max_{0 \leq t \leq T} |u(t, x)| \leq M(1 + \|x\|^2)$$

*où  $M$  est une constante strictement positive, est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ku + g = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^p \\ u(T, x) = \Phi(x), \end{cases}$$

*alors on a pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^p$ ,*

$$\begin{aligned} u(t, x) = E \left[ \Phi(X_T^{t,x}) \exp \left( - \int_t^T k(r, X_r^{t,x}) dr \right) \right. \\ \left. + \int_t^T g(r, X_r^{t,x}) \exp \left( - \int_t^r k(u, X_u^{t,x}) du \right) dr \right]. \end{aligned}$$

Sur cet exemple, les techniques probabilistes nous ont donné un résultat d'unicité. Comme pour l'équation de la chaleur, on emploie ici les outils de l'analyse pour prouver l'existence. Aussi

ne chercherons nous pas à présenter d'énoncé réciproque à la proposition précédente, nous renvoyons au travail effectué par Friedman [17] pour de plus amples approfondissements. Toutefois, il serait hâtif d'en conclure que les techniques probabilistes ne fournissent que des résultats d'unicité. En effet, nous verrons dans la suite une approche probabiliste qui à la différence des méthodes précédentes permet d'obtenir des résultats d'existence.

Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{L}$  l'opérateur qui à toute fonction  $u$  associe la fonction

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

$\mathcal{L}$  est communément désigné comme étant le générateur infinitésimal du processus de diffusion

$$\begin{cases} dX_s = f(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s, \\ X_t = x. \end{cases}$$

Les équations de Feynman-Kac s'écrivent alors plus simplement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u - ku + g = 0.$$

Remarquons que dans les équations de Feynman-Kac, la dépendance en la solution  $u$  est linéaire. Malheureusement, de nombreux phénomènes d'origine physique ou économique sont régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires en  $u$ . Pour de telles équations, les techniques évoquées plus haut ne sont plus suffisantes. Différentes stratégies ont vu le jour pour parvenir à les résoudre, cependant force est de constater qu'elles ne s'appliquent souvent qu'à une classe restreinte d'équations aux dérivées partielles. Ainsi les superprocessus permettent de représenter les solutions d'une équation du type  $\Delta u = u^2$ , alors que les équations différentielles stochastiques rétrogrades donnent la représentation de solutions d'équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont lipschitziens en temps et en espace. Néanmoins, nous sommes rarement capables de montrer que les représentations probabilistes obtenues sont des solutions fortes, c'est à dire des solutions au sens usuel du terme et en particulier de classe  $C^2$ . Aussi introduisons nous dès maintenant, une notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles, plus adaptée à nos moyens. Nous parlerons alors de solutions au sens de viscosité.

## 4.2 Solutions de viscosité

Dans cette partie, nous ne donnons qu'un bref aperçu de la notion de solution de viscosité et de ses propriétés principales. Pour de plus amples détails sur le sujet, nous renvoyons le lecteur à [8] et [33]. Les solutions de viscosité ont été créées pour résoudre les équations aux dérivées partielles dont on ne peut obtenir de solutions au sens des distributions. Les solutions de viscosité en gardent les principales caractéristiques. Tout d'abord une solution forte d'une équation aux dérivées partielles en est aussi une solution de viscosité. De plus sous des hypothèses peu restrictives, il y a souvent existence et unicité des solutions de viscosité d'une équation aux dérivées

partielles. Le cadre général d'utilisation des solutions de viscosité est une équation aux dérivées partielles non linéaire définie dans  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$  de la forme

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0, \quad x \in U, \quad (4.1)$$

où  $Du$  est la différentielle de  $u$ ,  $D^2u$  sa différentielle seconde,  $F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times S_p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $S_p$  désigne les matrices  $p \times p$  symétriques positives. On pourrait en fait étendre la définition de solution de viscosité à des systèmes de la forme

$$F_k(x, u(x), Du_k(x), D^2u_k(x)) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

lorsque  $u = (u_1, \dots, u_n)$ . Nous nous limiterons dans cette thèse à des fonctions à valeurs réelles et renvoyons à [21] pour le cas général.

On munit  $S_p$  de l'ordre partiel habituel  $\leq$  sur  $S_p \times S_p$  :

$$A \leq B \text{ si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R}^p, \quad x^*Ax \leq x^*Bx.$$

Donnons maintenant les hypothèses usuelles faites sur  $F$ . On dira que  $F$  est propre si

$$F(x, r, q, X) \leq F(x, s, q, X), \quad \forall r \leq s, \quad (4.2)$$

$$F(x, r, q, X) \leq F(x, r, q, Y), \quad \forall Y \leq X. \quad (4.3)$$

Considérons maintenant  $u$  de classe  $C^2$  sur  $U$  (on notera  $u \in C^2(U)$ ) solution classique de (4.1) et donnons nous  $\phi \in C^2(U)$  et  $x \in U$  maximum local de  $u - \phi$ . On a par définition de  $x$ ,  $Du(x) = D\phi(x)$  et  $D^2u(x) \leq D^2\phi(x)$ , puis grâce à la propriété (4.3), on obtient que

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0.$$

De même, si  $\psi \in C^2(U)$  et  $x \in U$  minimum local de  $u - \psi$ , alors on a

$$F(x, u(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq 0.$$

Ce résultat nous permet donc d'étendre la notion de solution classique de l'équation (4.1). Pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , on notera  $C(U)$  l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur  $U$ . Le raisonnement précédent nous permet alors d'étendre la notion de solution classique de l'équation (4.1) à des solutions faibles que l'on supposera continues ici (en toute généralité, on peut étendre à des fonctions semi-continues) : les solutions de viscosité.

**Définition 4.4** Soit  $u \in C(U)$

- $u$  est une sous-solution de viscosité de (4.1) si pour tout  $\phi \in C^2(U)$ , pour tout  $x \in U$  maximum local de  $u - \phi$ , on a  $F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0$ .
- $u$  est une sur-solution de viscosité de (4.1) si pour tout  $\phi \in C^2(U)$ , pour tout  $x \in U$  minimum local de  $u - \phi$ , on a  $F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \geq 0$ .
- $u$  est une solution de viscosité de (4.1) si elle en est à la fois une sous-solution et une sur-solution.

Les solutions de viscosités présentent de nombreux intérêts. L'un des plus commodes est leur stabilité par passage à la limite que le théorème suivant illustre bien.

**Théorème 4.5** Supposons que pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n \in C(U)$  est une sous-solution (resp sur-solution) de l'équation  $H_n(x, u_n, Du_n, D^2u_n) = 0$  sur  $U$  où  $H_n$  vérifie (4.3).

Si  $(H_n)$  converge uniformément dans  $U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times S_p$  vers  $H$  (en particulier  $H$  est continue), et  $(u_n)$  converge uniformément sur  $U$  vers  $u$ , alors  $u$  est une sous-solution (resp sur-solution) de  $H(x, u, Du, D^2u) = 0$  sur  $U$ .

**Démonstration.**

Soit  $\phi \in C^2(U)$  et  $x_0 \in U$  maximum local de  $u - \phi$ . Nous devons établir que

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

Quitte à changer  $\phi$  par  $\phi + \theta$  où  $\theta(x) = |x - x_0|^4$  et en remarquant que  $D\theta(x_0) = 0$  et  $D^2\theta(x_0) = 0$ , on peut supposer que  $x_0$  est un maximum local strict de  $u - \phi$ .

Il est commode alors d'appliquer le lemme suivant :

**Lemme 4.6** Soit une suite de fonctions  $(u_n)$  convergeant uniformément sur  $U$ . Notons  $u$  sa limite. Supposons de plus que  $u$  possède un maximum local strict dans  $U$  noté  $x_0$ .

Alors il existe une suite  $(x_n)$  dans  $U$  qui converge vers  $x_0$  et telle que pour  $n$  suffisamment grand,  $x_n$  est un maximum local de  $u_n$ .

**Démonstration du lemme.**

Considérons  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subset U$  et  $\forall x \in B(x_0, r)$ ,  $u(x) < u(x_0)$ . Considérons pour  $k \geq 1$ , le compact

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^p \mid |x - x_0| \leq r/2^k\} \subset B(x_0, r) \subset U.$$

L'idée de la démonstration est d'utiliser le caractère strict du maximum local de  $u$ , afin de montrer que sur ce compact pour  $n$  assez grand le maximum de  $u_n$  n'est pas atteint sur sa frontière, ce sera donc un maximum local de  $u_n$  dans  $U$ . Plus précisément, considérons

$$\mu = u(x_0) - \sup_{x \in S(x_0, r/2^k)} u(x)$$

où  $S(x_0, r/2^k) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid |x - x_0| = r/2^k\}$  est la frontière du compact  $C_k$ .  $x_0$  étant un maximum local strict,  $\mu > 0$  et

$$\forall x \in S(x_0, r/2^k), u(x_0) - u(x) \geq \mu.$$

Notons  $x_n^k$  le maximum de  $u_n$  sur  $C_k$ . De

$$\begin{aligned} u(x_0) - u(x_n^k) &= (u(x_0) - u_n(x_0)) + (u_n(x_0) - u_n(x_n^k)) + (u_n(x_n^k) - u(x_n^k)) \\ &\leq (u(x_0) - u_n(x_0)) + (u_n(x_n^k) - u(x_n^k)) \end{aligned}$$

et de la convergence uniforme de  $(u_n)$  vers  $u$ , on déduit qu'il existe  $N_k$  tel que  $\forall n \geq N_k$ ,  $x_n^k$  est un maximum local de  $u_n$  et  $x_n^k \in B(x_0, r/2^k)$ . On peut de plus faire en sorte que la suite d'entiers naturels  $(N_k)_k$  soit strictement croissante. En posant  $x_n = x_n^k$  pour  $N_k \leq n < N_{k+1}$ , on obtient la suite cherchée. □

Considérons donc  $N$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $x_n$  est un maximum local de  $u_n - \phi$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Par convergence uniforme,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_n) = u(x_0)$  et par définition de  $x_n$ ,  $Du_n(x_n) = D\phi(x_n)$  et  $D^2u_n(x_n) \leq D^2\phi(x_n)$ . Ainsi

$$H_n(x_n, u_n(x_n), D\phi(x_n), D^2\phi(x_n)) \leq 0$$

et, en passant à la limite en  $n$ , par convergence uniforme de  $H_n$  vers  $H$ , on obtient

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

Le raisonnement pour les sur-solutions se fait de la même façon en considérant cette fois les minima locaux. □

Nous allons motiver maintenant une des raisons majeures de l'utilisation de la notion de solution de viscosité : leur unicité pour une large classe d'équations aux dérivées partielles, moyennant des hypothèses relatives à la continuité de  $H$  dans (4.1).

La technique généralement employée afin d'obtenir l'unicité d'une solution de viscosité consiste à établir le résultat suivant. On considère dans la suite  $G$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^p$ .

**Principe du maximum** Soient  $u, v \in C(\bar{G})$  respectivement une sous-solution et une sur-solution de viscosité de l'équation (4.1) telles que  $u \leq v$  sur  $\partial G$ . Alors  $u \leq v$  sur  $G$ .

En effet, en particulier si  $u$  et  $v$  sont solutions de viscosité d'une même équation et vérifient les mêmes conditions limites ( $u = v$  sur  $\partial G$ ), elles en sont des sous et sur-solutions, donc  $u = v$  dans  $G$ . Il s'agit ensuite de trouver des conditions sur  $H$  (en général de continuité) suffisantes à obtenir le principe du maximum.

Nous n'établirons rigoureusement un résultat d'unicité que dans le cas d'une équation du type  $H(x, u, Du) = 0$ . Nous renvoyons à [8] et [33] pour des résultats plus généraux et une étude plus approfondie des solutions de viscosité.

**Théorème 4.7** *Supposons que  $F$  vérifie les hypothèses suivantes :  
pour tout  $R > 0$ , il existe  $\lambda_R > 0$  telle que ,  
pour tous  $x, r, s, q$  tels que  $|x| \leq R$ ,  $-R \leq r \leq s \leq R$ ,  $q \in \mathbb{R}^p$ ,*

$$\lambda_R(s - r) \leq F(x, s, q) - F(x, r, q) \quad (4.4)$$

*et pour tout  $R > 0$ , il existe  $\omega_R \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  vérifiant  $\omega_R(0) = 0$  et pour tous  $x, y, r$  tels que  $|x| \leq R$ ,  $|y| \leq R$ ,  $|r| \leq R$ ,  $q \in \mathbb{R}^p$ , on ait*

$$|F(x, r, q) - F(y, r, q)| \leq \omega_R(|x - y|(1 + |q|)). \quad (4.5)$$

*Le principe du maximum est alors vérifié.*

**Démonstration.**

Considérons donc  $u, v \in C(\bar{G})$  respectivement une sous et sur-solution de (4.1) dans  $G$  et supposons par l'absurde que

$$M = \sup_{x \in \bar{G}} (u(x) - v(x)) > 0.$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  n'étant pas forcément de classe  $C^2$ , de manière à utiliser les propriétés des solutions de viscosité, on use d'un artifice par l'intermédiaire du lemme suivant :

**Lemme 4.8** *Soit pour  $\alpha > 0$ , la fonction  $f_\alpha : \bar{G} \times \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$f_\alpha(x, y) = u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2.$$

*Considérons*

$$M_\alpha = \sup_{(x, y) \in \bar{G} \times \bar{G}} f_\alpha(x, y)$$

*et désignons par  $x_\alpha, y_\alpha$  les éléments de  $\bar{G}$  qui vérifient  $f_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = M_\alpha$ . On a alors*

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_\alpha = M$
- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u(x_\alpha) - v(y_\alpha) = M$
- $x_\alpha, y_\alpha \in G$  dès que  $\alpha$  suffisamment grand.

**Démonstration du lemme.**

On constate pour commencer que

$$M = \sup_{x \in \bar{G}} f_\alpha(x, x)$$

et que pour  $x, y \in \bar{G}$  fixés, la fonction  $\alpha \mapsto f_\alpha(x, y)$  est décroissante. On en déduit donc que  $\alpha \mapsto M_\alpha$  est décroissante et que  $\forall \alpha > 0$ ,  $M_\alpha \geq M$ .

L'existence de  $x_\alpha$  et  $y_\alpha$  est une conséquence de la compacité de  $\bar{G}$ .

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $x_\alpha$  et  $y_\alpha$  convergent lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$  dans  $\bar{G}$ . Notons  $x_\infty$  et  $y_\infty$  leurs limites respectives.

De l'égalité

$$M_\alpha = u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2, \quad (4.6)$$

on déduit que  $\forall \alpha > 0$ ,

$$M \leq u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2. \quad (4.7)$$

De plus par continuité de  $u$  et  $v$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u(x_\alpha) - v(y_\alpha) = u(x_\infty) - v(y_\infty)$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} |x_\alpha - y_\alpha|^2 = |x_\infty - y_\infty|^2.$$

On en déduit donc que  $x_\infty = y_\infty$ .

Comme  $\alpha \mapsto M_\alpha$  possède une limite lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$  et de l'égalité (4.6), on déduit que  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2$  existe.

Supposons maintenant par l'absurde que  $\delta = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 > 0$ . Alors à la limite dans (4.7), on obtient  $u(x_\infty) - v(x_\infty) - \delta \geq M$  puis par définition de  $M$  comme sup, on a  $M - \delta \geq u(x_\infty) - v(x_\infty) - \delta \geq M$  : absurde. Donc

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0$$

et toujours par (4.7)

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_\alpha = M.$$

De plus,  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u(x_\alpha) - v(x_\alpha) = M > 0$ . On en déduit que pour  $\alpha$  suffisamment grand,  $u(x_\alpha) - v(x_\alpha) > 0$  et donc que  $x_\alpha \in G$ .

On fait de même pour  $y_\alpha$  ce qui achève la démonstration du lemme.

□

En considérant pour  $\alpha > 0$  fixé, la fonction  $\phi(x) = v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x - y_\alpha|^2$  qui est bien de classe  $C^2$  en  $x$ , et le fait que  $x_\alpha$  est un maximum local de  $u - \phi$  où  $u$  est une sous-solution de (4.1), on déduit que

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \leq 0.$$



De même  $v$  est sur-solution de (4.1) donc

$$F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \geq 0.$$

En particulier,

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \leq F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)). \quad (4.8)$$

Puis en utilisant (4.4), (4.8) puis (4.5), on a

$$\begin{aligned} \gamma_R(u(x_\alpha) - v(y_\alpha)) &\leq F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \\ &\leq F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \\ &\leq \omega_R(|x_\alpha - y_\alpha| + \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2). \end{aligned}$$

D'après les résultats du lemme, le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ , tandis que le membre de gauche tend vers  $\gamma_R M$ . Cela contredit l'hypothèse  $M > 0$  et conclut la démonstration du théorème.  $\square$

La notion de solution de viscosité (et tous les résultats et propriétés qui en découlent) nous permet d'étudier les équations aux dérivées partielles à l'aide des solutions d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades. En effet, si l'on considère une solution  $(X, Y, Z)$  d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, sous les hypothèses évoquées au chapitre 3 qui en assurent au moins localement l'existence et l'unicité, garantir la régularité de  $v : (t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est un problème difficile et donc la dériver jusqu'à l'ordre 2 n'est pas envisageable. La notion de solution de viscosité va nous permettre de réduire notablement cette difficulté puisqu'on n'aura en général plus qu'à prouver la continuité de  $v$ . Nous pouvons maintenant passer au thème central de ce chapitre, le lien entre les équations aux dérivées partielles non linéaires et les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades.

### 4.3 Equations aux dérivées partielles non linéaires et équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

Les équations aux dérivées partielles de la proposition 4.3 ne faisaient pas explicitement intervenir de systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades. L'exemple suivant parviendra je l'espère à justifier naturellement l'intérêt qu'on leur porte dans le cadre de la résolution probabiliste des équations aux dérivées partielles.

Supposons qu'il existe une solution  $u$  suffisamment régulière ( $C^2$  et bornée par exemple) de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + g(u) = 0 \\ u(T, x) = \Phi(x) \end{cases}$$

où  $g$  est une fonction non linéaire et  $\mathcal{L}$  est le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion  $X$ . Autrement dit,  $X$  et  $\mathcal{L}$  sont liés par :

$$\begin{cases} dX_s = f(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dB_s, \\ \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^*)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Alors par la formule d'Itô, on obtient

$$u(s, X_s) = u(T, X_T) - \int_s^T \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u \right)(r, X_r) dr - \int_s^T (\nabla u \cdot \sigma)(r, X_r) dB_r.$$

Considérons le processus  $Y$  défini par

$$Y_s = u(s, X_s)$$

et le processus  $Z$  défini par

$$Z_s = (\nabla u \cdot \sigma)(s, X_s).$$

On voit alors que le couple  $(Y, Z)$  est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(Y_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r.$$

On remarque que si le processus de diffusion  $X$  part de  $x$  à l'instant  $t$  (i.e.  $X_t = x$ ),  $(X, Y, Z)$  est alors solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dB_r, \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(Y_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r. \end{cases} \quad (4.9)$$

De plus,  $Y_t = u(t, X_t) = u(t, x)$ . En particulier  $Y_t$  est déterministe.

Plus généralement lorsque les coefficients d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades sont déterministes, les théorèmes d'existence et d'unicité du chapitre 3 peuvent être appliqués sans problèmes de mesurabilité avec la filtration  $(\mathcal{F}_s^t)_{s \geq t}$  où  $\mathcal{F}_s^t$  est la complétion usuelle de  $\sigma(B_u - B_t, t \leq u \leq s)$ . On en déduit donc que lorsque la solution  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades concerné existe, elle est adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_s^t)_{s \geq t}$ . En particulier  $Y_t^{t,x}$  est déterministe.

Partant de l'équation aux dérivées partielles, on a naturellement pu introduire un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades associé. Réciproquement, la remarque précédente nous montre que partant de ce système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, on peut retrouver la solution de l'équation aux dérivées partielles associée.

En résumé,  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  où  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.9).

Notons toutefois que définir la solution de l'équation aux dérivées partielles à partir de la solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades est en général plus délicat. En effet, il faut tout d'abord prouver l'existence et l'unicité d'un triplet  $(X, Y, Z)$  solution du système précédent à l'aide par exemple des résultats du chapitre précédent. Ensuite, si l'on veut appliquer la formule d'Itô comme précédemment, il est nécessaire d'avoir suffisamment de régularité sur l'application  $v : (t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$ . Cela peut nécessiter de fortes hypothèses de régularité sur les coefficients  $f, g, \sigma$  et  $\Phi$ .

Eclairons ce dernier point sur l'exemple des systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades de la forme

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r)dB_r, \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r, \end{cases} \quad t \leq s \leq T. \quad (4.10)$$

Remarquons qu'ici  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$ . Deux approches différentes répondent au problème cité plus haut :

- La première, due à Ma, Protter et Yong, part de l'hypothèse que les coefficients  $f, g, \sigma$  sont de classe  $C^{1,2}$ ,  $\Phi$  de classe  $C^{1,2}$ , leurs dérivées partielles étant bornées,  $\sigma$  suit une hypothèse de non dégénérescence et que la solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.10) se présente sous la forme  $Y_s = u(s, X_s)$  avec  $u$  déterministe. En utilisant les théorèmes d'existence et d'unicité de solution d'équation aux dérivées partielles donnés par des techniques analytiques dans [24] à l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $u$ , ils montrent que  $u$  est de classe  $C^{1,2}$  puis, à l'aide du calcul d'Itô, ils obtiennent l'expression explicite en fonction de  $u$  de la solution du système d'équations différentielles progressives rétrogrades (4.10). On obtient donc par cette méthode une représentation probabiliste qui est solution classique de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $u$ . Cette approche est souvent désignée par le nom de schéma en 4 étapes.
- La seconde approche a l'avantage de ne pas demander d'hypothèses de régularité aussi fortes sur les coefficients et ne nécessite pas d'hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ . Elle présuppose juste deux conditions. Premièrement on doit pouvoir définir le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.10) et donc d'après le chapitre 3 avoir des hypothèses lipschitziennes sur les coefficients. Deuxièmement la fonction  $v$  définie par  $v(t, x) = Y_t^{t,x}$  doit être continue. En contrepartie, elle ne pourra fournir des solutions au sens classique du terme, mais des solutions de viscosité. De plus, la notion de solution de viscosité n'étant définie que pour des fonctions à valeurs réelles, cela en diminue quelque peu la portée des résultats.

Etudions plus en détail ces deux approches.

### 4.3.1 Approche par le schéma en 4 étapes

Nous allons d'abord expliquer l'approche donnée par Ma, Protter et Yong en 1994 [28] sur l'exemple des systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.10), c'est à dire où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$  mais suit une hypothèse de non dégénérescence, puis sur ceux qui nous intéressent en particulier, i.e. lorsque  $\sigma$  dépend de  $Z$ . Le principe est analogue dans les deux cas, mais la résolution est nettement plus compliquée pour le second. On notera que cette méthode, contrairement à l'approche par les solutions de viscosité peut s'appliquer à un système (4.10) où  $\Phi, Y$  et  $g$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  avec  $m$  entier naturel non nul.

On a alors

$$\begin{aligned} X &: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ Y &: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ Z &: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}, \\ f &: [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ g &: [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \sigma &: [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{p \times d}, \\ \Phi &: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

On part de l'hypothèse que si  $(X, Y, Z)$  est solution de (4.10),  $Y_s = u(s, X_s)$  où  $u$  est une fonction déterministe. En supposant  $u$  suffisamment régulière, on peut appliquer la formule d'Itô à  $u(s, X_s)$  et après identification obtenir

$$\begin{cases} -g(t, X_t, u(t, X_t), Z_t) = u_t^k + \langle u_x^k(t, X_t), f(t, X_t, u(t, X_t), Z_t) \rangle \\ \quad + \frac{1}{2} \text{tr}[u_{xx}^k(t, X_t) \sigma(t, X_t, u(t, X_t)) \sigma(t, X_t, u(t, X_t))^t] & k = 1, \dots, m \\ u_x(t, X_t) \sigma(t, X_t, u(t, X_t)) = Z_t \\ u(T, X_T) = \Phi(X_T). \end{cases} \quad (4.11)$$

En conclusion, si on considère pour  $f, g, \sigma$  de classe  $C^{1,2}$ ,  $\Phi$  de classe  $C^2$ , leurs dérivées partielles étant bornées et  $\sigma$  suivant une hypothèse de non dégénérescence et par le théorème d'existence et d'unicité des équations aux dérivées partielles de [24] la solution  $u$  de

$$\begin{cases} u_t^k + \langle u_x^k(t, x), f(t, x, u(t, x), u_x(t, x) \sigma(t, x, u(t, x))) \rangle \\ \quad + \frac{1}{2} \text{tr}[u_{xx}^k(t, x) \sigma(t, x, u(t, x)) \sigma(t, x, u(t, x))^t] & k = 1, \dots, m \\ \quad + g(t, x, u(t, x), u_x(t, x) \sigma(t, x, u(t, x))) = 0 \\ u(T, x) = \Phi(x), \end{cases} \quad (4.12)$$

$u$  est de classe  $C^{1,2}$  et les calculs précédents sont valides. En particulier, si  $X$  est solution de l'équation différentielle stochastique progressive

$$X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, u(r, X_r), u_x(r, X_r) \sigma(r, X_r, u(r, X_r))) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, u(r, X_r)) dB_r$$

alors

$$((X_s, u(s, X_s), u_x(s, X_s) \sigma(s, X_s, u(s, X_s)))$$

est solution de (4.10).

On peut reprocher à cette méthode de ne pas être entièrement probabiliste au sens où elle fait appel au théorème d'existence et unicité de [24]. Par contre, elle prouve l'existence et l'unicité globale des solutions de (4.10) comme précédemment évoqué pour des coefficients vérifiant les hypothèses de régularité et sous une hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ . Notons que dans ce cas où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$  et sous cette même hypothèse de non dégénérescence sur  $\sigma$ , par régularisation et passage à la limite, Delarue a pu étendre l'existence et l'unicité globale au cas où les coefficients sont lipschitziens [10].

Examinons maintenant ce qu'il se passe si l'on considère des systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades où le coefficient  $\sigma$  dépend de  $Z$ , c'est à dire de la forme

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r)dB_r, \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r, \quad t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (4.13)$$

Dans ce contexte, cherchant toujours des solutions de la forme  $Y_s = u(s, X_s)$ , le système (4.11) devient

$$\begin{cases} -g(t, X_t, u(t, X_t), Z_t) = u_t^k + \langle u_x^k(t, X_t), f(t, X_t, u(t, X_t), Z_t) \rangle \\ \quad + \frac{1}{2} \text{tr}[u_{xx}^k(t, X_t) \sigma(t, X_t, u(t, X_t), Z_t) \sigma(t, X_t, u(t, X_t), Z_t)^t] \quad k = 1, \dots, m \\ u_x(t, X_t) \sigma(t, X_t, u(t, X_t), Z_t) = Z_t \\ u(T, X_T) = \Phi(X_T). \end{cases} \quad (4.14)$$

Pour pouvoir continuer la méthode de Ma, Protter et Yong, il faut pouvoir écrire

$$Z_t = z(t, X_t, u(t, X_t), u_x(t, X_t)) \quad (4.15)$$

et prouver l'existence d'une solution à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} u_t^k + \langle u_x^k(t, x), f(t, x, u, z(t, x, u, \nabla u)) \rangle \\ \quad + \frac{1}{2} \text{tr}[u_{xx}^k(t, x) \sigma(t, x, u, z(t, x, u, \nabla u)) \sigma(t, x, u, z(t, x, u, \nabla u))^t] \\ \quad + g(t, x, u, z(t, x, u, \nabla u)) = 0 \quad k = 1, \dots, m \\ u(T, x) = \Phi(x). \end{cases} \quad (4.16)$$

Non seulement résoudre (4.15) nécessite de la régularité sur  $\sigma$  et sa non dégénérescence en vue d'appliquer le théorème des fonctions implicites, mais, au final, l'expression de  $Z_t$  et de l'équation aux dérivées partielles (4.16) est totalement implicite. Pour ces raisons, nous avons préféré aborder le problème par une autre approche utilisant les solutions de viscosité, initiée par Pardoux et Tang.

### 4.3.2 Approche par les solutions de viscosité

De manière à éviter tous les désagréments de régularité intervenant dans l'approche précédente, on procède autrement et on se restreint en quelque sorte en ne cherchant que des solutions de viscosité. C'est pourquoi les notions introduites au paragraphe 4.2 nous seront bien utiles. Ainsi plutôt que de s'escrimer à prouver que  $v$  est solution de l'EDP, va t'on chercher à démontrer qu'elle en est une solution de viscosité.

Considérons l'équation aux dérivées partielles sous-jacente au problème traité. De manière générale, nous disposons d'un bon candidat au titre de solution et dans cette thèse ce sera toujours une fonction  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  où  $Y$  est solution d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades. Pour démontrer que notre candidat  $u$  est solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles en jeu, il y a par définition 2 points importants à vérifier

- i- on montre que  $u$  est continue.
- ii- on montre que la propriété sur les maxima et minima locaux est vérifiée.

Remarquons que souvent la continuité obtenue en -i- simplifie grandement la preuve de -ii-.

Le résultat qui va suivre que l'on doit à Pardoux et Tang [35], illustre bien l'utilisation de la notion de solution de viscosité dans la résolution d'équations aux dérivées partielles. La démonstration est très instructive, non seulement elle montre la complémentarité de la notion de solution de viscosité avec la théorie des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, mais elle nous servira de modèle pour l'obtention du principal résultat de ce chapitre.

On s'intéresse donc toujours aux systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades de la forme

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r)dB_r, \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r, \quad t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (4.17)$$

Même s'il est possible de se placer dans le cadre général des systèmes étudiés dans [21], on supposera ici que  $m = 1$ . En se plaçant sous les hypothèses évoquées au chapitre précédent, on sait qu'il existe  $T > 0$  tel que l'on ait existence et l'unicité de la solution  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  de (4.17) sur  $[0, T]$ . Pardoux et Tang obtiennent le résultat suivant, clarifiant fortement le lien entre le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.17) et l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (\mathcal{L}u)(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)\sigma(t, x, u(t, x))) \\ \quad + g(t, x, u(t, x), (\nabla u)(t, x)\sigma(t, x, u(t, x))) = 0, \quad t \in [0, T[, x \in \mathbb{R}^p \\ u(T, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (4.18)$$

où ici  $\mathcal{L}$  est l'opérateur qui à la fonction  $u$  associe la fonction

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)_{ij}(t, x, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i(t, x, u, \nabla u \cdot \sigma(t, x, u)) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

**Théorème 4.9** *La fonction déterministe  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}^p$ . De plus,  $u$  est solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles (4.18).*

**Démonstration.**

La continuité de  $u$  s'obtient en utilisant des théorèmes de continuité en les paramètres concernant des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades à paramètres. Nous ne détaillons pas la preuve ici, car nous serons amenés à le faire pour démontrer le principal résultat de ce chapitre. Nous pouvons toutefois souligner que le principal ingrédient de cette preuve est un résultat similaire au théorème 3.9.

Nous allons maintenant prouver que  $u$  est sous-solution de viscosité de (4.18) en suivant la preuve de Pardoux et Tang. Montrer qu'elle est sur-solution de viscosité se traitant de la même manière, cela suffira à prouver qu'on a une solution de viscosité.

Considérons donc  $\phi$  de classe  $C^2$  et  $(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}^p$  un minimum local de  $\phi - u$ . Quitte à translater  $\phi$  par une constante, on peut supposer que  $\phi(t, x) = u(t, x)$ . Supposons alors par l'absurde que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + (\mathcal{L}\phi)(t, x, u(t, x), (\nabla \phi)(t, x)\sigma(t, x, u(t, x))) \\ + g(t, x, u(t, x), (\nabla \phi)(t, x)\sigma(t, x, u(t, x))) < 0. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de  $u$ , on peut alors considérer  $0 < \alpha < T - t$  tel que, sur

$$\{(s, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}^p, t \leq s \leq t + \alpha, |x - y| \leq \alpha\},$$

on ait

$$\begin{cases} u(s, y) \leq \phi(s, y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, y) + (\mathcal{L}\phi)(s, y, u(s, y), (\nabla \phi)(s, y)\sigma(s, y, u(s, y))) \\ + g(s, y, u(s, y), (\nabla \phi)(s, y)\sigma(s, y, u(s, y))) < 0. \end{cases}$$

Nous allons étudier les processus  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  durant la période où  $(s, X_s^{t,x})$  ne sort pas de cet ensemble. A cette fin, nous introduisons

$$\tau = \min \left( \inf \{s > t, |X_s^{t,x} - x| \geq \alpha\}, t + \alpha \right)$$

et les processus

$$(\bar{Y}_s, \bar{Z}_s) = (Y_{s \wedge \tau}^{t,x}, 1_{[t, \tau]}(s)Z_s^{t,x})$$

pour  $t \leq s \leq t + \alpha$ . Les processus  $(\bar{Y}, \bar{Z})$  représentent formellement les processus  $(Y, Z)$  entre les instants  $t$  et  $\tau$ .

Considérons en outre les processus

$$(\hat{Y}_s, \hat{Z}_s) = (\phi(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}), 1_{[t, \tau]}(s)\nabla \phi(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x}, u(s, X_s^{t,x})))$$

pour  $t \leq s \leq t + \alpha$ . On note que les processus  $(\hat{Y}, \hat{Z})$  représenteraient la solution de (4.17) si  $u$  était suffisamment régulière.

Nous allons maintenant pouvoir comparer les processus  $(\bar{Y}, \bar{Z})$  avec les processus  $(\hat{Y}, \hat{Z})$ . En effet,  $(\bar{Y}, \bar{Z})$  vérifient, pour  $t \leq s \leq t + \alpha$ , l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$\bar{Y}_s = u(\tau, X_\tau^{t,x}) + \int_{s \wedge \tau}^\tau g(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \bar{Z}_r) dr - \int_s^{t+\alpha} \bar{Z}_r dB_r$$

alors que  $(\hat{Y}, \hat{Z})$  vérifient, pour  $t \leq s \leq t + \alpha$ , l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$\hat{Y}_s = \phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - \int_{s \wedge \tau}^\tau \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, X_r^{t,x}) + (\mathcal{L}\phi)(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \bar{Z}_r) \right] dr - \int_s^{t+\alpha} \hat{Z}_r dB_r.$$

On a donc

$$\hat{Y}_s - \bar{Y}_s = \phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - u(\tau, X_\tau^{t,x}) + \int_{s \wedge \tau}^\tau \bar{\beta}_r dr - \int_{s \wedge \tau}^\tau (\hat{Z}_r - \bar{Z}_r) dB_r$$

où

$$\bar{\beta}_r = - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, X_r^{t,x}) + (\mathcal{L}\phi)(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \bar{Z}_r) + g(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \bar{Z}_r) \right].$$

En notant

$$\hat{\beta}_r = - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, X_r^{t,x}) + (\mathcal{L}\phi)(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \hat{Z}_r) + g(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), \hat{Z}_r) \right],$$

et en remarquant qu'il existe  $c > 0$  telle que  $|\bar{\beta}_r - \hat{\beta}_r| \leq c \|\bar{Z}_r - \hat{Z}_r\|$ , on déduit qu'il existe un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté  $(\gamma_r)$  tel que

$$\bar{\beta}_r - \hat{\beta}_r = \langle \gamma_r, \bar{Z}_r - \hat{Z}_r \rangle.$$

Finalement,

$$\hat{Y}_s - \bar{Y}_s = \phi(\tau, X_\tau^{t,x}) - u(\tau, X_\tau^{t,x}) + \int_{s \wedge \tau}^\tau \hat{\beta}_r dr + \int_{s \wedge \tau}^\tau \langle \gamma_r, \hat{Z}_r - \bar{Z}_r \rangle dr - \int_{s \wedge \tau}^\tau (\hat{Z}_r - \bar{Z}_r) dB_r$$

et donc  $(\hat{Y} - \bar{Y}, \hat{Z} - \bar{Z})$  vérifie une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire. D'après ce qui a été vu au chapitre précédent au travers de la proposition 3.7, on a alors l'égalité

$$\hat{Y}_t - \bar{Y}_t = E \left[ \Gamma_{t,\tau} (\hat{Y}_\tau - \bar{Y}_\tau) + \int_t^\tau \Gamma_{t,s} \hat{\beta}_s ds \right]$$

où

$$\Gamma_{t,s} = \exp \left( \int_t^s \gamma_r dB_r - \frac{1}{2} \int_t^s |\gamma_r|^2 dr \right).$$

Nous avons par hypothèse  $u(\tau, X_\tau^{t,x}) \leq \phi(\tau, X_\tau^{t,x})$  et  $\hat{\beta}_r > 0$  sur l'intervalle  $[t, \tau]$ , on en déduit donc que  $\hat{Y}_t - \bar{Y}_t > 0$ , c'est à dire  $u(t, x) < \phi(t, x)$ . C'est contradictoire.  $\square$



## 4.4 Cas où le coefficient d'ordre 2 dépend du gradient

Deux problèmes majeurs semblent gêner l'extension du résultat précédent à des systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades où le coefficient de diffusion  $\sigma$  dépend également de  $Z$ .

- Tout d'abord, quelles équations aux dérivées partielles sont associées à de tels systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades ?
- Si on suppose la première question résolue, on s'aperçoit que techniquement, dans le cas où  $\sigma$  dépend de  $Z$ , on n'a pas immédiatement la continuité de  $u : (t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$ . Or elle semble très utile à la démonstration précédente. Comment prouve t'on la continuité de  $u$  dans ce cas ?

Le schéma en 4 étapes de Ma, Protter et Yong répond d'une certaine manière à la première question, mais dans l'optique que nous adoptons (c'est à dire résoudre les équations aux dérivées partielles par les solutions de systèmes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades et non l'inverse), la réponse donnée nous paraît trop implicite pour être transposée à cette approche, ce qui nous entraînera à poser le problème sous une forme différente. Nous allons tout d'abord répondre à la seconde question, ce qui constituera un résultat nouveau à notre connaissance. Nous verrons qu'en calquant la preuve de Pardoux et Tang, au cas où  $\sigma$  dépend de  $Z$  nous pourrions alors répondre d'une autre manière à la première question constituant ainsi là-aussi un résultat nouveau et le principal résultat de ce chapitre.

Nous considérons donc maintenant le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r, Z_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r)dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dB_r. \end{cases} \quad (4.19)$$

Pour simplifier la présentation, on va supposer jusqu'à la fin de cette partie que  $T$  est choisi tel que  $\rho(A(0)) < 1$ , où  $A$  est la matrice de la proposition 2.7. Par le théorème 3.12, on sait alors que pour  $t \in [0, T[$ , la solution  $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$  de (4.19) est définie sur  $[t, T]$ . Remarquons que pour obtenir existence et unicité, comme mentionné au chapitre 3, on pourrait prendre des conditions moins restrictives sur les coefficients de (4.19). Toutefois, on n'obtient la continuité de  $u : (t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  que sous les hypothèses du théorème 3.12. En effet, comme il en a été fait allusion dans la preuve précédente, le principal ingrédient nécessaire à la démonstration de la continuité est une majoration au sens de normes adéquates des solutions du système (4.19). Dans le cas où  $\sigma$  dépend de  $Z$ , la seule alternative au théorème 3.9 est notre théorème 3.13. Sous les hypothèses prises ( $\rho(A(0)) < 1$ ), nous donnons une version plus faible mais suffisante à nos besoins.

**Théorème 4.10** *Il existe une constante  $C > 0$  (ne dépendant que de  $T$  et des constantes de Lipschitz des fonctions  $f, g, \sigma$  et  $\phi$ ) telle que*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \leq s \leq T} E [|X_s^{t,x}|^2] + \sup_{t \leq s \leq T} E [|Y_s^{t,x}|^2] + E \left[ \int_t^T \|Z_s^{t,x}\|^2 ds \right] \\ & \leq C \left( |x|^2 + E[\Phi(0)^2] + E \left[ \int_t^T (|f(r, 0, 0, 0)|^2 + |g(r, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2) dr \right] \right) \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Tout d'abord, remarquons que les coefficients de la matrice  $A(t)$  décroissent avec  $t$ . En désignant par  $N$  la “norme sup” ie  $\forall C \in M_d(\mathbb{R}), N(C) = \sup_{1 \leq i, j \leq d} |C_{ij}|$ , par positivité des coefficients de la

matrice  $A(t)$  et par la proposition 2.2, on déduit que  $t \mapsto \rho(A(t))$  est décroissante.

En utilisant les notations du chapitre 3, par décroissance de  $t \mapsto \rho(A(t))$ ,  $\Psi^{t,x}$  est  $\rho(A(0))$  contractante. La démonstration de 3.13 donne alors une constante  $C$  qui ne dépend que de  $T$  et des constantes de Lipschitz des fonctions  $f, g, \sigma$  et  $\phi$ . On en déduit trivialement le résultat avec les sup à l'extérieur des espérances.  $\square$

Munis de cette majoration, nous pouvons attaquer la résolution du second problème. Soulignons de nouveau que ce résultat n'avait jamais été démontré dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire où  $\sigma$  dépend de  $Z$ . Par contre, dans le cas où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$ , on peut trouver des résultats de ce type dans de nombreuses références ([35],[10] par exemple).

**Théorème 4.11** *La fonction  $u$  définie sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^p$  par  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  est continue.*

**Démonstration.**

Soit  $(t_0, x_0)$  fixé. Notons  $\bar{X}_s = X_s^{t,x} - X_s^{t_0, x_0}$ ,  $\bar{Y}_s = Y_s^{t,x} - Y_s^{t_0, x_0}$ ,  $\bar{Z}_s = Z_s^{t,x} - Z_s^{t_0, x_0}$ . On voit alors que  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} dX_s = \bar{f}(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + \bar{\sigma}(s, X_s, Y_s, Z_s)dB_s \\ dY_s = \bar{g}(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - Z_s dB_s \\ X_{t \wedge t_0} = x - x_0 \\ Y_T = \bar{\Phi}(X_T) \end{cases}$$

pour  $t \leq s \leq T$  où

$$\begin{cases} \bar{f}(r, x, y, z) = 1_{r \geq t} f(r, x + X_r^{t_0, x_0}, y + Y_r^{t_0, x_0}, z + Z_r^{t_0, x_0}) - 1_{r \geq t_0} f(r, X_r^{t_0, x_0}, Y_r^{t_0, x_0}, Z_r^{t_0, x_0}) \\ \bar{g}(r, x, y, z) = 1_{r \geq t} g(r, x + X_r^{t_0, x_0}, y + Y_r^{t_0, x_0}, z + Z_r^{t_0, x_0}) - 1_{r \geq t_0} g(r, X_r^{t_0, x_0}, Y_r^{t_0, x_0}, Z_r^{t_0, x_0}) \\ \bar{\sigma}(r, x, y, z) = 1_{r \geq t} \sigma(r, x + X_r^{t_0, x_0}, y + Y_r^{t_0, x_0}, z + Z_r^{t_0, x_0}) - 1_{r \geq t_0} \sigma(r, X_r^{t_0, x_0}, Y_r^{t_0, x_0}, Z_r^{t_0, x_0}) \\ \bar{\Phi}(x) = \Phi(x + X_T^{t_0, x_0}) - \Phi(X_T^{t_0, x_0}). \end{cases}$$

En appliquant le théorème 4.10, on obtient donc que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \wedge t_0 \leq s \leq T} E [|X_s^{t,x} - X_s^{t_0,x_0}|^2] + \sup_{t \wedge t_0 \leq s \leq T} E [|Y_s^{t,x} - Y_s^{t_0,x_0}|^2] + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^T \|Z_s^{t,x} - Z_s^{t_0,x_0}\|^2 ds \right] \\ & \leq C \left( |x - x_0|^2 + E[|\bar{\Phi}(0)|^2] + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^T |\bar{f}(r, 0, 0, 0)|^2 dr \right] \right. \\ & \quad \left. + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^T |\bar{g}(r, 0, 0, 0)|^2 dr \right] + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^T \|\bar{\sigma}(r, 0, 0, 0)\|^2 dr \right] \right) \end{aligned}$$

**Remarque** On a en fait prolongé  $X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x}$  et  $X^{t_0,x_0}, Y^{t_0,x_0}, Z^{t_0,x_0}$  respectivement sur  $[t \wedge t_0, t]$  et  $[t \wedge t_0, t_0]$  alors qu'a priori, on ne pouvait les considérer que sur  $[t \vee t_0, +\infty[$ .

Il suffit maintenant de noter que

$$\begin{aligned} E \left[ \int_{t \wedge t_0}^T |\bar{f}(r, 0, 0, 0)|^2 dr \right] &= E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} |f(r, X_r^{t_0,x_0}, Y_r^{t_0,x_0}, Z_r^{t_0,x_0})|^2 dr \right] \\ &\leq C \left( E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} |f(r, 0, 0, 0)|^2 \right] + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} |X_r^{t_0,x_0}|^2 dr \right] \right. \\ &\quad \left. + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} |Y_r^{t_0,x_0}|^2 dr \right] + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} \|Z_r^{t_0,x_0}\|^2 dr \right] \right) \\ &\leq C(1 + |x_0|^2)|t - t_0| + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} (|f(r, 0, 0, 0)|^2 + \|Z_r^{t_0,x_0}\|^2) dr \right]. \end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé de nouveau le théorème précédent. On obtient la même inégalité si l'on remplace  $\bar{f}$  par  $\bar{\sigma}$  et comme  $\bar{g}(r, 0, 0, 0) = 0$  et  $\bar{\Phi}(0) = 0$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \wedge t_0 \leq s \leq T} E [|X_s^{t,x} - X_s^{t_0,x_0}|^2] + \sup_{t \wedge t_0 \leq s \leq T} E [|Y_s^{t,x} - Y_s^{t_0,x_0}|^2] + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^T \|Z_s^{t,x} - Z_s^{t_0,x_0}\|^2 ds \right] \\ & \leq C \left( |x - x_0|^2 + (1 + |x_0|^2)|t - t_0| \right. \\ & \quad \left. + E \left[ \int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} (|f(r, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2 + \|Z_r^{t_0,x_0}\|^2) dr \right] \right) \end{aligned}$$

et donc que

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0,x_0)} (X^{t,x} - X^{t_0,x_0}, Y^{t,x} - Y^{t_0,x_0}, Z^{t,x} - Z^{t_0,x_0}) = (0, 0, 0).$$

Ensuite en écrivant que

$$\begin{aligned}
|u(t, x) - u(t_0, x_0)|^2 &= E[Y_t^{t, x} - Y_{t_0}^{t_0, x_0}]^2 \\
&\leq 2E[|Y_t^{t, x} - Y_t^{t_0, x_0}|^2] + 2E[|Y_t^{t_0, x_0} - Y_{t_0}^{t_0, x_0}|^2] \\
&\leq 2E[|Y_t^{t, x} - Y_t^{t_0, x_0}|^2] + 2E\left[\int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} |g(r, X_r^{t_0, x_0}, Y_r^{t_0, x_0}, Z_r^{t_0, x_0})|^2 dr\right] \\
&\quad + 2E\left[\int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} \|Z_r^{t_0, x_0}\|^2 dr\right] \\
&\leq C\left(|x - x_0|^2 + (1 + |x_0|^2)|t - t_0| + E\left[\int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} |f(r, 0, 0, 0)|^2 dr\right]\right. \\
&\quad \left.+ E\left[\int_{t \wedge t_0}^{t \vee t_0} (|g(r, 0, 0, 0)|^2 + \|\sigma(r, 0, 0, 0)\|^2 + \|Z_r^{t_0, x_0}\|^2) dr\right]\right),
\end{aligned}$$

on vérifie que la fonction  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  est bien continue.  $\square$

**Remarque 4.12** En reprenant la preuve précédente, on peut obtenir d'autres résultats de régularité. Il est par exemple trivial (prendre  $t = t_0$  dans la preuve) de montrer que la fonction  $u$  est lipschitzienne en  $x$  (i.e.  $\forall t, u(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne). C'est une propriété très importante si l'on souhaite prolonger le résultat d'existence et d'unicité locale à un résultat d'existence et d'unicité global. Malheureusement, pour pouvoir effectivement obtenir une telle extension, il faut être capable de contrôler la constante de Lipschitz, ce qui est bien difficile dans notre cas. On notera également que la continuité à  $x$  fixé dépend, d'après la dernière inégalité de la preuve, du comportement du processus  $Z$ . Comprendre celui-ci est certainement la question la plus délicate de la théorie des systèmes d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades.

Nous voudrions maintenant répondre au premier problème mentionné plus haut, c'est à dire décrire les équations aux dérivées partielles que l'on peut représenter au sens de viscosité par la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades. Y répondre de but en blanc n'est pas particulièrement évident. Plaçons nous plutôt dans le cadre dans lequel la réponse à cette question nous serait le plus pratique. Pour être plus précis, nous aimerions considérer une équation aux dérivées partielles de la forme déjà vue précédemment, mais où les coefficients des dérivées secondes pourraient également dépendre du gradient de la solution. Ce type d'équations aux dérivées partielles trouvent des applications dans de nombreux domaines, même les plus inattendus comme le débruitage d'images. La question est : pour une telle équation aux dérivées partielles, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes me permettant d'en représenter la solution à l'aide de la solution d'une équation différentielle stochastique progressive rétrograde. C'est sous cette optique que nous allons procéder.

Considérons donc

$$\begin{cases} M : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^{p \times p}, \\ f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p, \\ g : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \\ \Phi : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}. \end{cases}$$

On aimerait trouver une représentation probabiliste des solutions d'équations aux dérivées partielles du type

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \sum_{1 \leq i, j \leq d} M(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x))_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ \quad + \left\langle f(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)), \nabla u(t, x) \right\rangle + g(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)) = 0 \\ \quad \text{pour } t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^p, \\ u(T, x) = \Phi(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^p. \end{array} \right.$$

Malheureusement, on s'apercevra que si l'on veut résoudre des équations aux dérivées partielles où  $M$  dépend de  $\nabla u$  par les solutions d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, cela imposera une condition sur le coefficient de diffusion  $\sigma$  de celles-ci. En fait, on verra qu'imposer à un coefficient de l'équation aux dérivées partielles précédente qu'il dépende de  $\nabla u$ , entraîne une contrainte supplémentaire au coefficient  $\sigma$  et au coefficient concerné. Afin de ne pas avoir à gérer des contraintes incompatibles et donc de ne pas travailler sur l'ensemble vide, on va se restreindre à ne considérer que des équations aux dérivées partielles où la dépendance en le gradient de la solution n'apparaît que dans les coefficients des dérivées secondes. On ne considérera donc que des équations aux dérivées partielles du type

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \sum_{ij} M(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x))_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ \quad + \left\langle f(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)), \nabla u(t, x) \right\rangle + g(t, x, u(t, x)) = 0 \\ \quad \text{pour } t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^p, \\ u(T, x) = \Phi(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^p. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

On cherche donc sous quelles conditions sur les coefficients  $f, g, \sigma$  et  $\Phi$  de l'équation différentielle progressive rétrograde

$$(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r, Y_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r) dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r, \quad t \leq s \leq T \end{array} \right., \quad (4.21)$$

la fonction  $u$  définie par  $u(t, x) = Y_t^{t, x}$  est solution de  $(\mathcal{S})$ . Le théorème suivant répond à cette interrogation et constitue le principal résultat de ce chapitre.

**Théorème 4.13** *Sous les hypothèses du théorème (3.12), si  $f, g$  et  $\Phi$  sont des fonctions globalement continues,  $M$  une fonction globalement lipschitzienne et de plus  $\sigma$  est une matrice inversible vérifiant les conditions*

$$\forall t, x, y, z, \quad \sigma \sigma^*(t, x, y, z) = 2M\left(t, x, y, (\sigma^*(t, x, y, z))^{-1} z\right), \quad (4.22)$$

$$\exists \lambda > 0, \quad \forall t, x, y, z, w, \quad |\sigma(t, x, y, z)^{-1} w| \leq \lambda |w|, \quad (4.23)$$

alors,  $Y^{t, x}$  désignant l'unique solution sur  $[0, T]$  de  $(\mathcal{E})$ , la fonction  $u(t, x) = Y_t^{t, x}$  est continue sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^d$  et est solution de viscosité de  $(\mathcal{S})$ .

**Lemme 4.14** *On a presque sûrement pour tout  $s \in [t, T]$ ,*

$$Y_s^{t,x} = Y_s^{s, X_s^{t,x}} = u(s, X_s^{t,x}).$$

**Démonstration du lemme.**

Nous adaptons la démonstration du cas  $\sigma$  non dépendant de  $Z$  de Delarue [10] au cas  $\sigma$  dépendant de  $Z$ , en utilisant la technique de comparaison utilisée précédemment dans le théorème 4.11.

Nous fixons  $s \in [t, T]$  et  $U$  un variable  $\mathcal{F}_s$  mesurable.

Nous considérons alors le système d'équations différentielles stochastique progressive retrograde suivant

$$\begin{cases} X_u = U + \int_s^u f(r, X_r, Y_r, Z_r) dr + \int_s^u \sigma(r, X_r, Y_r, Z_r) dB_r \\ Y_u = \Phi(X_T) + \int_u^T g(r, X_r, Y_r) dr - \int_u^T Z_r dB_r, \quad s \leq u \leq T \end{cases}, \quad (4.24)$$

Il n'est pas difficile d'étendre les théorèmes 3.12 et 3.13 à ce système en remplaçant  $|x|^2$  par  $E[|U|^2]$ . Nous pouvons donc poser  $(X^{s,U}, Y^{s,U}, Z^{s,U})$  l'unique solution du système (4.24). Nous montrons alors qu'il existe une constante strictement positive  $C$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$E[1_{|U-x|<\varepsilon} |Y_s^{s,U} - Y_s^{s,x}|^2] \leq CE[1_{|U-x|<\varepsilon} |U - x|^2]. \quad (4.25)$$

En effet, soient pour  $r \in [s, T]$ ,

$$\bar{X}_r = X_r^{s,U} - X_r^{s,x}, \quad \bar{Y}_r = Y_r^{s,U} - Y_r^{s,x}, \quad \bar{Z}_r = Z_r^{s,U} - Z_r^{s,x}.$$

Alors,  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  est solution du système d'équations différentielles stochastique progressive rétrograde

$$\begin{cases} \bar{X}_u = U - x + \int_s^u \bar{f}(r, \bar{X}_r, \bar{Y}_r, \bar{Z}_r) dr + \int_s^u \bar{\sigma}(r, \bar{X}_r, \bar{Y}_r, \bar{Z}_r) dB_r, \\ \bar{Y}_u = \bar{h}(\bar{X}_T) + \int_u^T \bar{g}(r, \bar{X}_r, \bar{Y}_r, \bar{Z}_r) dr - \int_u^T \bar{Z}_r dB_r, \quad s \leq u \leq T \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{f}(r, u, v, w) &= f(r, u + X_r^{s,x}, v + Y_r^{s,x}, w + Z_r^{s,x}) - f(r, u, v, w) \\ \bar{g}(r, u, v, w) &= g(r, u + X_r^{s,x}, v + Y_r^{s,x}, w + Z_r^{s,x}) - g(r, u, v, w) \\ \bar{\sigma}(r, u, v, w) &= \sigma(r, u + X_r^{s,x}, v + Y_r^{s,x}, w + Z_r^{s,x}) - \sigma(r, u, v, w) \\ \bar{h}(u) &= h(u + X_T^{s,x}) - h(X_T^{s,x}). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\bar{f}, \bar{g}, \bar{\sigma}$  et  $\bar{h}$  vérifient les hypothèses (H1), (H2) et (H3).

Si l'on considère désormais un ensemble  $A \in \mathcal{F}_s$  et les processus définis pour  $r \in [s, T]$  par

$$(X_r^A, Y_r^A, Z_r^A) = (1_A X_r, 1_A Y_r, 1_A Z_r),$$

on obtient encore des processus progressivement mesurables relativement à la filtration  $\mathcal{F}$  et qui de plus sont solutions du système d'équations différentielles progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_u^A = 1_A(U - x) + \int_u^u 1_A \bar{f}(r, X_r^A, Y_r^A, Z_r^A) dr + \int_u^u 1_A \bar{\sigma}(r, X_r^A, Y_r^A, Z_r^A) dB_r, \\ Y_u^A = 1_A \bar{h}(X_T^A) + \int_u^T 1_A \bar{g}(r, X_r^A, Y_r^A, Z_r^A) dr - \int_u^T Z_r^A dB_r, \quad s \leq u \leq T \end{cases} \quad (4.26)$$

En appliquant le théorème 3.13 à ce système (après avoir remarqué que  $\bar{f}(r, 0, 0, 0) = 0$  et idem pour  $\bar{g}$ ,  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{h}$ ), on obtient l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $x$  telle que

$$E \left[ \sup_{s \leq r \leq T} |1_A \bar{X}_r|^2 \right] + E \left[ \sup_{s \leq r \leq T} |1_A \bar{Y}_r|^2 \right] + E \left[ \int_s^T |1_A \bar{Z}_r|^2 dr \right] \leq C (1_A |U - x|^2).$$

En particulier, nous en déduisons

$$E [1_A |Y_s^{s,x} - Y_s^{s,U}|^2] \leq C E [1_A |U - x|^2]$$

et donc (4.25) pour  $A = \{|U - x| < \varepsilon\}$ .

Ensuite, comme

$$\begin{aligned} E [1_{\{|U-x|<\varepsilon\}} |u(s, U) - Y_s^{s,U}|^2] &\leq E [1_{\{|U-x|<\varepsilon\}} |u(s, U) - u(s, x)|^2] \\ &\quad + E [1_{\{|U-x|<\varepsilon\}} |Y_s^{s,x} - Y_s^{s,U}|^2] \\ &\leq 2 (E [1_{\{|U-x|<\varepsilon\}} |u(s, U) - u(s, x)|^2] \\ &\quad + C E [1_{\{|U-x|<\varepsilon\}} |U - x|^2]) \\ &\leq C' E [1_{\{|U-x|<\varepsilon\}} |U - x|^2] \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant une conséquence du théorème 3.13 et de (4.25).

On conclut la preuve en écrivant pour tout entier strictement positif  $N$ ,

$$\begin{aligned} E[|u(s, U) - Y_s^{s,U}|^2] &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} E [1_{\{|U-k/N|<1/N\}} |u(s, U) - Y_s^{s,U}|^2] \\ &\leq \frac{C'}{N^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} E [1_{\{|U-k/N|<1/N\}}] \\ &\leq \frac{C' 2^d}{N^2}. \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout  $N \geq 1$ , on obtient que  $Y_s^{s,U} = u(s, U)$  ps

La première égalité du résultat attendu s'obtient par unicité de la solution de la FBSDE (4.24) et la seconde de l'égalité précédente lorsque  $U = X_s^{t,x}$ .

□

**Démonstration.**

Nous allons adapter la preuve de Pardoux et Tang [35] que nous avons vu précédemment à l'équation  $(\mathcal{E})$ .

La preuve de la continuité ayant déjà été l'objet du théorème 4.11, nous n'avons qu'à prouver la propriété sur les extrema locaux. Nous allons juste montrer que  $u$  est une sur-solution de  $(\mathcal{E})$ , la preuve qu'il s'agit également d'une sous-solution utilisant les mêmes arguments.

Remarquons que, par l'hypothèse d'inversibilité de  $\sigma$ , on a  $p = d$ . Considérons donc une fonction  $\phi$  de classe  $C^2$  définie sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}^d$  et à valeurs réelles. Soit  $(t_0, x_0)$  un maximum local de  $u - \phi$ . Quitte à modifier  $\phi$ , on peut de plus supposer que  $(u - \phi)(t_0, x_0) = 0$ . Nous cherchons à prouver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x_0) + \sum_{1 \leq i, j \leq d} M(t_0, x_0, u(t_0, x_0), \nabla \phi(t_0, x_0))_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(t_0, x_0) \\ + \left\langle f(t_0, x_0, u(t_0, x_0)), \nabla \phi(t_0, x_0) \right\rangle + g(t_0, x_0, u(t_0, x_0)) \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que ce soit faux. Par continuité de  $u$ , il existe une boîte centrée en  $(t_0, x_0)$  dans laquelle on a l'inégalité contraire. On peut donc considérer un réel  $\mu$  vérifiant  $0 < \mu < T - t_0$  et tel que, pour tout  $(t, x) \in [t_0, t_0 + \mu] \times B(x_0, \mu)$ , nous ayons à la fois

$$u(t, x) \leq \phi(t, x)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + \sum_{1 \leq i, j \leq d} M(t, x, u(t, x), \nabla \phi(t, x))_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \\ + \left\langle f(t, x, u(t, x)), \nabla \phi(t, x) \right\rangle + g(t, x, u(t, x)) < 0. \end{aligned}$$

On va s'intéresser aux processus  $X^{t_0, x_0}$ ,  $Y^{t_0, x_0}$  et  $Z^{t_0, x_0}$ , lorsque  $X^{t_0, x_0}$  vit dans cette boîte. On introduit donc le temps d'arrêt

$$\tau = \min \left( \inf \left\{ s \geq t_0, X_s^{t_0, x_0} \notin B(x_0, \mu) \right\}, t_0 + \mu \right)$$

et on considère, pour simplifier les notations, les processus

$$(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s) = (X_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}, Y_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}, 1_{[t_0, \tau]}(s) Z_s^{t_0, x_0}).$$

Les processus  $\bar{X}_s$ ,  $\bar{Y}_s$  et  $\bar{Z}_s$  représentent donc les processus  $X^{t_0, x_0}$ ,  $Y^{t_0, x_0}$  et  $Z^{t_0, x_0}$  arrêtés lorsque  $X^{t_0, x_0}$  sort de la boîte. On va maintenant comparer  $(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)$  au candidat naturel donné par la formule d'Itô. En effet, si on applique la formule d'Itô au processus  $\phi(s, X_s^{t_0, x_0})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \phi(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}) = \phi(\tau, X_\tau^{t_0, x_0}) - \int_{s \wedge \tau}^{\tau} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(v, X_v^{t_0, x_0}) + L_\sigma \phi(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}) \right) dv \\ - \int_{s \wedge \tau}^{\tau} \nabla \phi(v, X_v^{t_0, x_0}) \sigma(v, X_v^{t_0, x_0}, Y_v^{t_0, x_0}, Z_v^{t_0, x_0}) dB_v \end{aligned}$$



où  $L_\sigma$  désigne l'opérateur différentiel

$$L_\sigma \phi(s, x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \sigma \sigma^*(s, x, y, z)_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(s, x) + \langle f(s, x, y), \nabla \phi(s, x) \rangle.$$

Il est donc naturel de considérer, pour  $s \in [t_0, t_0 + \mu]$ , les processus

$$(\hat{X}_s, \hat{Y}_s, \hat{Z}_s) = (X_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}, \phi(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}), \nabla \phi(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}) \sigma(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}, Y_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}, Z_{s \wedge \tau}^{t_0, x_0}))$$

et de chercher à comparer  $(\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)$  et  $(\hat{X}_s, \hat{Y}_s, \hat{Z}_s)$ . Le lien entre  $(\hat{X}_s, \hat{Y}_s, \hat{Z}_s)$  et l'équation aux dérivées partielles  $(\mathcal{E})$  n'apparaissant pas de manière évidente, on réécrit la dernière formule sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{s \wedge \tau} &= \phi(\tau, X_\tau^{t_0, x_0}) - \int_{s \wedge \tau}^\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(v, \hat{X}_v) + L_M \phi(v, \hat{X}_v) \right) dv - \int_{s \wedge \tau}^\tau \hat{Z}_v dB_v \\ &\quad - \int_{s \wedge \tau}^\tau \sum_{1 \leq i, j \leq d} \left[ \frac{1}{2} \sigma \sigma^*(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}) \right. \\ &\quad \left. - M(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), \nabla \phi(v, X_v^{t_0, x_0})) \right]_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(v, X_v^{t_0, x_0}) dv \end{aligned}$$

où  $L_M$  désigne l'opérateur différentiel

$$L_M \phi(s, x) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} M(s, x, u(s, x), \nabla \phi(s, x))_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(s, x) + \langle f(s, x, u(s, x)), \nabla \phi(s, x) \rangle.$$

Or, en utilisant la relation (4.22), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma \sigma^*(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}) &= \\ M(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), (\sigma^*(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}))^{-1} Z_v^{t_0, x_0}) & \end{aligned}$$

et, par définition de  $\hat{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \frac{1}{2} \sigma \sigma^*(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}) - M(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), \nabla \phi(v, X_v^{t_0, x_0})) \\ &= M(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), (\sigma^*(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}))^{-1} Z_v^{t_0, x_0}) \\ &\quad - M(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), (\sigma^*(v, X_v^{t_0, x_0}, u(v, X_v^{t_0, x_0}), Z_v^{t_0, x_0}))^{-1} \hat{Z}_v). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses du théorème 3.12,  $M$  est lipschitzienne et donc, avec l'hypothèse (4.23), on obtient qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\alpha(v)| \leq C |Z_v^{t_0, x_0} - \hat{Z}_v|.$$

Par conséquent, pour tout  $i$  et  $j$ , il existe un processus  $\gamma_u^{ij}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , adapté et borné, tel que

$$\alpha(v)_{ij} = \langle \gamma_v^{ij}, (Z_v^{t_0, x_0} - \hat{Z}_v) \rangle.$$

On remarque qu'alors

$$\begin{aligned}\bar{Y}_s - \hat{Y}_s &= (u - \phi)(\tau, \hat{X}_\tau) + \int_{s \wedge \tau}^\tau \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(v, \hat{X}_v) + L_M \phi(v, \hat{X}_v) + g((v, \hat{X}_v, u(v, \hat{X}_v))) \right) dv \\ &\quad + \int_{s \wedge \tau}^\tau \langle (\gamma \partial^2 \phi)_v, \bar{Z}_v - \hat{Z}_v \rangle dv - \int_{s \wedge \tau}^\tau (\bar{Z}_v - \hat{Z}_v) dB_v\end{aligned}$$

où  $(\gamma \partial^2 \phi)_v$  désigne le processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$

$$(\gamma \partial^2 \phi)_v = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(v, X_v^{t_0, x_0}) \gamma_v^{ij}.$$

On a maintenant tous les ingrédients pour faire apparaître une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire. En effet, si l'on note  $\beta$  le processus de carré intégrable défini par

$$\beta_v = \frac{\partial \phi}{\partial t}(v, \hat{X}_v) + L_M \phi(v, \hat{X}_v) + g((v, \hat{X}_v, u(v, \hat{X}_v))),$$

nous avons alors pour tout  $t_0 \leq s \leq \tau$

$$\begin{aligned}\bar{Y}_s - \hat{Y}_s &= (u - \phi)(\tau, \hat{X}_\tau) + \int_{s \wedge \tau}^\tau \left( \beta_v + \langle (\gamma \partial^2 \phi)_v, \bar{Z}_v - \hat{Z}_v \rangle \right) dv - \int_{s \wedge \tau}^\tau (\bar{Z}_v - \hat{Z}_v) dB_v \\ &= E \left[ \Gamma_{s, \tau} (\bar{Y}_\tau - \hat{Y}_\tau) + \int_s^\tau \Gamma_{s, v} \beta_v dv \middle| \mathcal{F}_s \right]\end{aligned}$$

où

$$\Gamma_{s, v} = \exp \left( \int_s^v (\gamma \partial^2 \phi)_u dB_u - \frac{1}{2} \int_s^v |(\gamma \partial^2 \phi)_u|^2 du \right).$$

En particulier,

$$\bar{Y}_{t_0} - \hat{Y}_{t_0} = (u - \phi)(t_0, x_0) = E \left[ \Gamma_{t_0, \tau} (\bar{Y}_\tau - \hat{Y}_\tau) + \int_{t_0}^\tau \Gamma_{t_0, v} \beta_v dv \right]$$

et, par définition de  $\tau$ ,

$$\bar{Y}_\tau - \hat{Y}_\tau \leq 0 \quad \text{et} \quad \beta_v < 0 \text{ pour tout } t_0 \leq v < \tau.$$

On en déduit que  $(u - \phi)(t_0, x_0) < 0$  et donc on aboutit à une contradiction.  $\square$

**Remarque 4.15** Les hypothèses de régularité sur  $f, g, \Phi$  et  $M$  interviennent dans la démonstration du théorème pour justifier deux points précis :

- la continuité des fonctions
  - $(t, x) \mapsto M(t, x, u(t, x), \Delta \phi(t, x))$
  - $(t, x) \mapsto f(t, x, u(t, x))$
  - $(t, x) \mapsto g(t, x, u(t, x))$

- les propriétés de la fonction  $\alpha$

Sous les hypothèses du théorème (3.12), on peut donc les assouplir par

- $(t, x, y, z) \mapsto M(t, x, y, z)$  globalement continue et

$$\exists C > 0, \forall (t, x, y), \quad |M(t, x, y, z) - M(t, x, y, z')| \leq C|z - z'|$$

- $t \mapsto f(t, x, y, z)$  et  $t \mapsto g(t, x, y, z)$  continues

**Remarque 4.16** La condition (4.22) nous montre que l'on ne peut choisir  $M$  quelconque. On ne pourra donc, même en s'étant donné une grande liberté sur les coefficients  $f$  et  $g$ , représenter les solutions de toute équation aux dérivées partielles du type  $(S)$ .

De plus, une fois  $M$  choisi, le coefficient  $\sigma$  doit vérifier la relation (4.22) qui le lie à la matrice  $M$ . Si l'on avait voulu faire dépendre les coefficients  $f$  et  $g$  dans l'équation  $(S)$  du gradient de la solution, on voit que dans la démonstration précédente, on aurait décomposé les termes en  $f$  et  $g$  comme on a décomposé  $\sigma$ , entraînant de nouvelles contraintes.

D'une certaine manière, plus on fait dépendre l'équation aux dérivées partielles  $\mathcal{E}$  du gradient de la solution, plus la classe de ces mêmes équations aux dérivées partielles représentables par une équation différentielle stochastique progressive rétrograde se restreint.

Nous aimerions, pour pouvoir appliquer le théorème précédent, être capable de trouver les matrices  $M$  susceptibles de répondre à la condition (4.22). La complexité de cette condition est telle que l'on ne peut réellement espérer décrire ses solutions en toute dimension. Néanmoins, on peut remarquer que si  $d = 1$  et  $M$  ne dépend plus que de sa dernière coordonnée ( $M = M(z)$ ), alors la condition (4.22) se simplifie considérablement. Il est alors assez naturel d'émettre l'hypothèse que la fonction  $M$  est injective ce qui, pour des fonctions réelles continues, est équivalent à la prendre monotone. Les deux sections suivantes sont donc consacrées au cas  $d = 1$  respectivement pour  $M$  croissante et  $M$  décroissante.

## 4.5 Cas unidimensionnel : cas d'une fonction $M$ croissante sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie, nous allons étudier plus particulièrement le cas où la fonction  $M : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante et ne dépend que de  $z$ . Les coefficients  $f$  et  $g$  n'intervenant pas dans la condition (4.22), on se concentrera sur le cas particulier où  $f = g = 0$ . Résumons rapidement la situation et les résultats dont nous disposons dans ce cas particulier. Tout d'abord on cherche une représentation probabiliste de la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + M\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R} \\ u(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.27)$$

où  $M$  et  $\Phi$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ . On voit alors que la condition (4.22) revient à trouver une fonction  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait

$$\sigma(x)^2 = 2M\left(\frac{x}{\sigma(x)}\right). \quad (4.28)$$

De plus, cette fonction  $\sigma$  doit être choisie de manière à ce que le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s \sigma(Z_r^{t,x}) dB_r \\ Y_s^{t,x} = \Phi(X_T^{t,x}) - \int_s^T Z_r^{t,x} dB_r \end{cases} \quad t \leq s \leq T \quad (4.29)$$

possède une unique solution. En fait, dans le but de prouver que  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  est une solution de viscosité de (4.27), il nous faudra non seulement existence et unicité de la solution de (4.29) mais aussi la continuité de  $u$ . La proposition suivante clarifie ces exigences :

**Proposition 4.17** *Si  $\sigma$  et  $\Phi$  sont des fonctions lipschitziennes de constantes de Lipschitz respectives  $k_\sigma$  et  $k_\Phi$ , et si  $k_\sigma k_\Phi < 1$ , alors le système d'équations différentielles progressives rétrogrades (4.29) possède une unique solution et la fonction  $u : [0, T[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $u(t, x) = Y_t^{t,x}$  est continue.*

#### Démonstration.

Remarquons tout d'abord qu'en utilisant les notations du chapitre 3, on a

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{6}k_\sigma & 8\sqrt{6}k_\phi k_\sigma & 4\sqrt{3}k_\phi k_\sigma \end{pmatrix}$$

qui est de rayon spectral  $\rho(A(0))$  égal à  $4\sqrt{3}k_\phi k_\sigma$ . On a donc, d'après les théorèmes 3.12 et 4.11, que, si  $4\sqrt{3}k_\phi k_\sigma < 1$ , il existe une unique solution au système (4.29) et que la fonction  $(t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}$ .

En fait, il n'est pas difficile dans ce cas simple d'améliorer la matrice  $A$ . En reprenant la démonstration de la proposition 3.11, on s'aperçoit que, dans ce cas particulier, les constantes obtenues par les inégalités de Cauchy-Schwarz s'améliorent et que l'information importante est

détenue par la dernière inégalité i.e. (on reprend les notations de la preuve de 3.11)

$$\begin{aligned}
\|\Delta Z\|_2^2 &= E \left[ \int_t^T \|Z_r - Z'_r\|^2 dr \right] \\
&= E \left[ \left| \int_t^T (Z_r - Z'_r) dB_r \right|^2 \right] \\
&\leq E \left[ |\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) - E[\Phi(X_T) - \Phi(X'_T) | \mathcal{F}_t]|^2 \right] \\
&\leq E[|\Phi(X_T) - \Phi(X'_T)|^2] \\
&\leq k_\Phi^2 E[|X_T - X'_T|^2] \\
&\leq k_\Phi^2 E \left[ \left| \int_t^T (\sigma(W_r) - \sigma(W'_r)) dB_r \right|^2 \right] \\
&\leq k_\Phi^2 E \left[ \int_t^T |\sigma(W_r) - \sigma(W'_r)|^2 dr \right] \\
&\leq k_\Phi^2 k_\sigma^2 E \left[ \int_t^T \|W_r - W'_r\|^2 dr \right] \\
&\leq k_\Phi^2 k_\sigma^2 \|\Delta W\|_2^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc une matrice

$$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & k_\phi k_\sigma \end{pmatrix}$$

de rayon spectral  $k_\phi k_\sigma$ . Cela conclut la preuve de cette proposition.  $\square$

**Remarque 4.18** La démonstration précédente n'est pas spécifique au cas où les entiers naturels  $p, d$  et  $m$  sont égaux à 1, les seules hypothèses qui ont permis d'améliorer la matrice ont été de prendre  $M = M(z)$  et les coefficients  $f$  et  $g$  nuls.

Nous considérerons ici uniquement des fonctions  $M$  vérifiant les conditions suivantes :

- (A1)  $M$  est une fonction paire,
- (A2)  $M$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ ,
- (A3)  $M(0) > 0$ ,
- (A4)  $M$  est continuellement différentiable sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée bornée
- (A5) les zéros de  $M'$  sont isolés,
- (A6)  $M'$  a une limite à droite en 0.

Dans la suite, par convention, on notera  $M(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

**Proposition 4.19** *Supposons que la fonction  $M$  vérifie (A1) – (A6). Alors la fonction  $\Psi$  définie par*

$$\Psi : \begin{cases} [\sqrt{2M(0)}; \sqrt{2M(\infty)}[ \rightarrow [0, +\infty[ \\ x \mapsto xM^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{cases} \quad (4.30)$$

*est une bijection strictement croissante.*

*De plus, on vérifie que la fonction réciproque  $\Psi^{-1}$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{\alpha}$  où*

$$\alpha = \inf_{t>0} \left\{ t + 2 \frac{M(t)}{M'(t)} \right\}.$$

**Démonstration.**

La fonction  $\Psi$  est croissante comme composée et produit de fonctions croissantes positives. De plus  $\Psi$  est clairement surjective.

En dérivant la fonction  $\Psi$ , on obtient qu'en dehors de points isolés de  $[\sqrt{2M(0)}, \sqrt{2M(\infty)}[$ ,

$$[\Psi^{-1}]'(\Psi(t)) = \frac{1}{M^{-1}(t^2/2) + t^2/M'(M^{-1}(t^2/2))}.$$

En posant  $t = \sqrt{2M(u)}$  pour  $u \in [0, +\infty[$ , on obtient que la fonction  $\Psi^{-1}$  est lipschitzienne si et seulement si  $\inf_{t>0} \left\{ t + 2 \frac{M(t)}{M'(t)} \right\} > 0$  i.e. si et seulement si  $\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{M(t)}{M'(t)} > 0$ , ce qui est le cas sous les hypothèses (A1) – (A6).  $\square$

Considérons la fonction  $\sigma$  coïncidant avec  $\Psi^{-1}$  sur  $[0, +\infty[$  et prolongée par parité sur  $]-\infty, 0]$ . La fonction  $\sigma$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{\alpha}$  et l'image de  $\sigma$  est l'intervalle

$$[\sqrt{2M(0)}, \sqrt{2M(\infty)}[.$$

De plus, pour tout  $x$  réel, l'égalité

$$\frac{1}{2}\sigma(x)^2 = M\left(\frac{x}{\sigma(x)}\right)$$

est satisfaite et grâce à l'hypothèse (A3), la condition (4.23) aussi. Les hypothèses (A1) et (A4) nous assurent le caractère lipschitzien de  $M$  sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 4.20** *Supposons que la fonction  $M$  vérifie les conditions (A1) – (A6) et que la fonction  $\Phi$  est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz strictement inférieure à  $\alpha$ . Considérons  $\sigma$  définie comme précédemment.*

*Alors le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.29) possède une unique solution sur  $[0, T]$ . De plus, la fonction  $(t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}$  et solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles (4.27).*

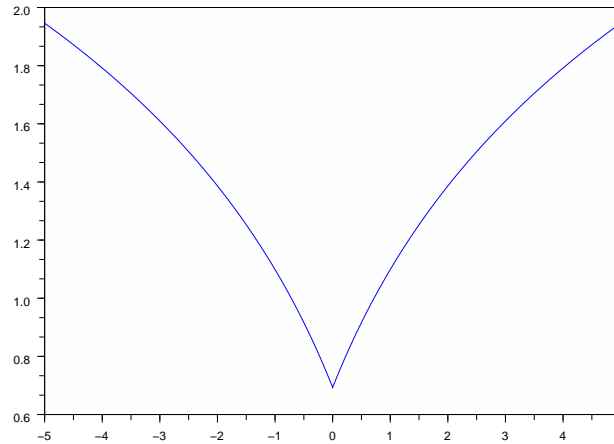
Examinons maintenant ce que peut donner cette proposition sur un exemple. Nous nous assurons par la même occasion que nous ne travaillons pas sur l'ensemble vide.

**Exemple 4.1** *Considérons pour  $\beta > 0$ , les fonctions  $M_\beta$  définies sur  $\mathbb{R}$  par*

$$M_\beta(x) = \ln(\beta|x| + 2).$$

*La figure 4.1 donne une représentation graphique de la fonction  $M_1$ .*

FIG. 4.1 – Graphe de  $M_1 : x \mapsto \ln(|x| + 2)$



*La fonction  $M_\beta$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ , d'image  $[\ln 2, +\infty[$ . Le calcul de sa réciproque sur  $[\ln 2, +\infty[$  est ici immédiat et on a, pour  $x \geq 1$ ,*

$$M_\beta^{-1}(x) = \frac{\exp x - 2}{\beta}.$$

*Par la proposition 4.19, on obtient, pour  $x \geq \sqrt{2 \ln 2}$ ,*

$$\Psi_\beta(x) = \frac{x}{\beta} \left( \exp \left( \frac{x^2}{2} \right) - 2 \right).$$

*La figure 4.2 donne une représentation graphique de la fonction  $\Psi_1$ .*

FIG. 4.2 – Graphe de  $\Psi_1 : x \mapsto x \left( \exp \left( \frac{x^2}{2} \right) - 2 \right)$

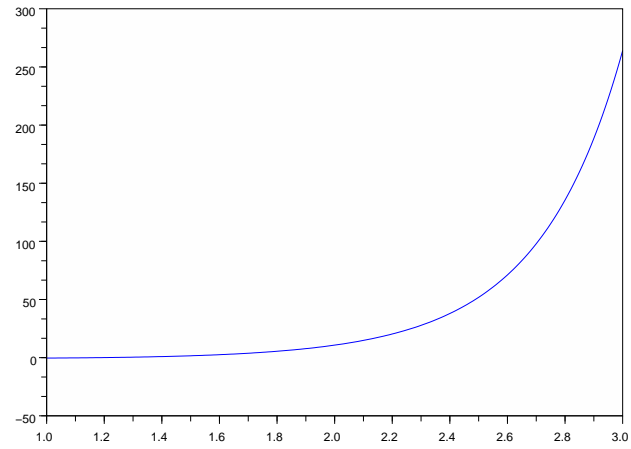
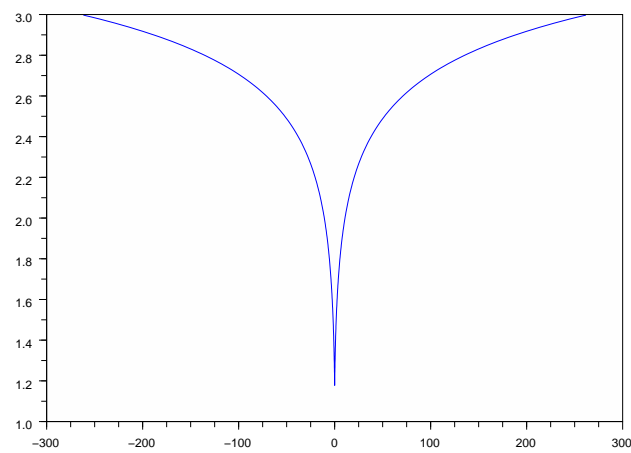


FIG. 4.3 – Graphe de  $x \mapsto \sigma_1(x)$  pour  $M_1(x) = \ln(|x| + 2)$





La fonction  $\Psi_\beta$  étant strictement croissante sur  $[\sqrt{2 \ln 2}, +\infty[$  d'image  $[0, +\infty[$ , on peut définir sa réciproque sur  $[0, +\infty[$ . On considère donc la fonction  $\sigma_\beta$  coïncidant avec  $\Psi_\beta^{-1}$  sur  $[0, +\infty[$  et prolongée sur  $] -\infty, 0[$  par parité.

Ici, le calcul de la dérivée de  $\Psi_\beta$  est aisé et on retrouve bien que

$$\alpha = \inf_{t>0} \left\{ t + \frac{2}{\beta} (\beta t + 2) \ln(\beta t + 2) \right\} = \frac{4 \ln 2}{\beta}.$$

Toujours par la proposition 4.19, on obtient que  $\sigma_\beta$  est une fonction  $\frac{\beta}{4 \ln 2}$ -lipschitzienne. La figure 4.3 donne une représentation graphique de la fonction  $\sigma_1$ .

En notant  $k_\Phi$  la constante de Lipschitz de la fonction  $\Phi$ , on a d'après la proposition 4.20, que si  $\beta k_\Phi < 4 \ln 2$  alors la fonction  $(t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}$  et solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \ln \left( \beta \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + 2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 4.6 Cas unidimensionnel : cas d'une fonction $M$ décroissante sur $[0, +\infty[$

Cette fois-ci, nous considérons le cas où la fonction  $M : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est décroissante et ne dépend que de  $z$ . Tout comme dans le cas précédent, nous supposons que  $f = g = 0$ . On cherche donc toujours une représentation probabiliste de la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + M \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R} \\ u(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.31)$$

en considérant la solution lorsqu'elle existe du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s \sigma(Z_r^{t,x}) dB_r \\ Y_s^{t,x} = \Phi(X_T^{t,x}) - \int_s^T Z_r^{t,x} dB_r \end{cases} \quad t \leq s \leq T. \quad (4.32)$$

Cette fois, nous considérerons uniquement des fonctions  $M$  vérifiant les conditions suivantes :

- (B1)  $M$  est une fonction paire,
- (B2)  $M$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ ,
- (B3)  $M$  est continuellement différentiable sur  $]0, +\infty[$  de dérivée bornée
- (B4) Les zéros de  $M'$  sont isolés
- (B5)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) > 0$
- (B6)  $\inf_{t > 0} \left\{ 2 \frac{M(t)}{|M'(t)|} - t \right\} > 0$ .

**Proposition 4.21** *Supposons que la fonction  $M$  vérifie les conditions (B1) – (B6). Alors la fonction  $\Psi$  définie par*

$$\Psi : \begin{cases} ]\sqrt{2M(\infty)}, \sqrt{2M(0)}] \rightarrow [0, +\infty[ \\ x \mapsto x M^{-1} \left( \frac{x^2}{2} \right) \end{cases} \quad (4.33)$$

*est une bijection strictement décroissante.*

*De plus, on vérifie que  $\Psi^{-1}$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{\alpha}$  où  $\alpha = \inf_{t \geq 0} \left\{ 2 \frac{M(t)}{|M'(t)|} - t \right\}$ .*

**Démonstration.**

On obtient la décroissance et le rapport de Lipschitz en utilisant l'expression de la dérivée obtenue dans la démonstration de la proposition 4.19 et l'hypothèse (B6). La surjectivité se déduit alors de l'hypothèse (B5).  $\square$

Considérons la fonction  $\sigma$  coïncidant avec la fonction  $\Psi^{-1}$  sur  $[0, +\infty[$  et prolongée par parité sur  $] -\infty, 0[$ . La fonction  $\sigma$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{\alpha}$ , et l'image de  $\sigma$  est l'intervalle  $]\sqrt{2M(\infty)}, \sqrt{2M(0)}]$ . De plus, pour tout  $x$  réel, l'égalité

$$\frac{1}{2} \sigma(x)^2 = M \left( \frac{x}{\sigma(x)} \right)$$

est satisfaite et grâce à l'hypothèse (B5), la condition (4.23) aussi.

Le résultat principal devient

**Proposition 4.22** *Supposons que la fonction  $M$  vérifie les conditions (B1) – (B6) et que la fonction  $\Phi$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz strictement inférieure à  $\alpha$ . Considérons la fonction  $\sigma$  définie comme précédemment.*

*Alors le système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (4.29) possède une unique solution sur  $[0, T]$ . De plus, la fonction  $(t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  et solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles (4.27).*

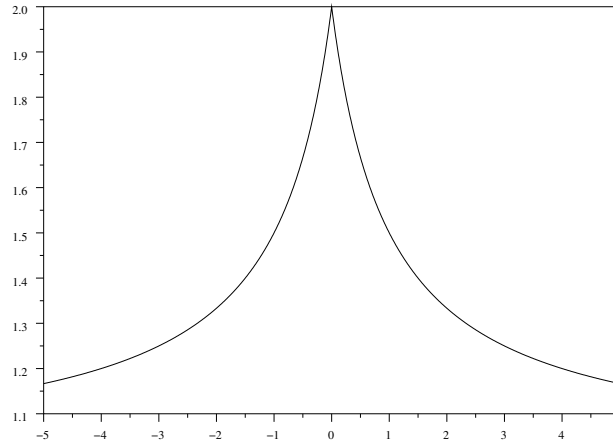
Donnons deux exemples illustrant cette proposition

**Exemple 4.2** Considérons pour  $\beta > 0$ , les fonctions  $M_\beta$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$M_\beta(x) = \frac{\beta}{|x| + \beta} + 1.$$

La figure 4.4 donne une représentation graphique de  $M_1$ .

FIG. 4.4 – Graphe de  $M_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+|x|}$



On vérifie que la fonction  $M_\beta$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$  et que son image est  $]1, 2]$ . On peut donc définir sa réciproque sur  $]1, 2]$  et un petit calcul nous montre alors que pour  $x \in ]1, 2]$ ,

$$M_\beta^{-1}(x) = \beta \frac{2-x}{x-1}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf_{t>0} \left\{ 2 \frac{M_\beta(t)}{|M'_\beta(t)|} - t \right\} \\ &= \inf_{t>0} \left\{ \frac{2 \left( \frac{\beta}{t+\beta} + 1 \right)}{\left| -\frac{\beta}{(t+\beta)^2} \right|} - t \right\} \\ &= \inf_{t>0} \left\{ t + 2\beta + 2 \frac{(t+\beta)^2}{\beta} \right\} \\ &= 4\beta. \end{aligned}$$

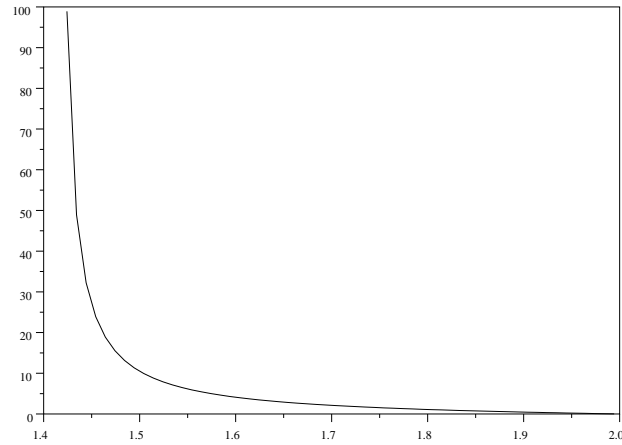
La proposition 4.21 nous affirme alors que la fonction  $\Psi_\beta$  définie pour  $x \in ]\sqrt{2}, 2]$  par

$$\Psi_\beta(x) = \beta \frac{x(4-x^2)}{x^2-2}$$

est strictement décroissante d'image  $[0, +\infty[$ .

La figure 4.5 donne une représentation graphique de  $\Psi_1$

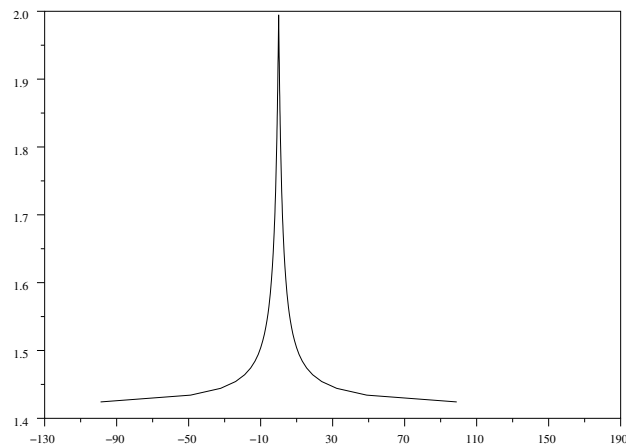
FIG. 4.5 – Graphe de  $\Psi_1 : x \mapsto \frac{x(4-x^2)}{x^2-2}$



On peut alors considérer  $\sigma_\beta$  coïncidant avec  $\Psi_\beta^{-1}$  sur  $[0, +\infty[$  et prolongée par parité sur  $] -\infty, 0[$ . On n'a pas d'expression explicite de  $\sigma_\beta$  mais toujours d'après la proposition 4.21, elle est  $\frac{1}{4\beta}$  lipschitzienne.

La figure 4.6 donne une représentation graphique de  $\sigma_1$

FIG. 4.6 – Graphe de  $\sigma_1$  pour  $M_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+|x|}$



Toujours en notant  $k_\Phi$  la constante de Lipschitz de la fonction  $\Phi$ , par la proposition 4.22 si  $k_\Phi < 4\beta$ , alors la fonction  $(t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}$  et solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles

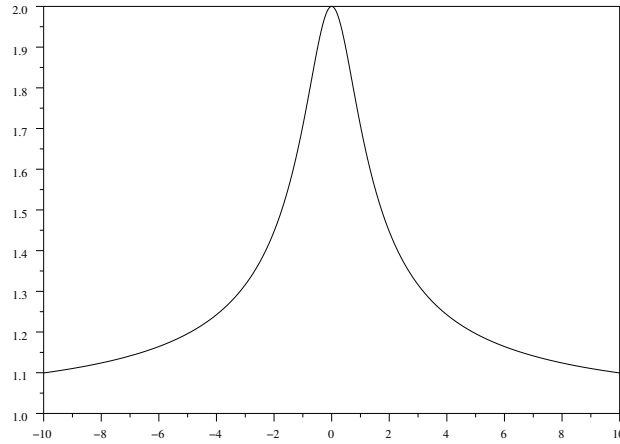
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{\beta}{\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \beta} + 1 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R} \\ u(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exemple 4.3** Considérons pour  $\beta > 0$  les fonctions  $M_\beta$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$M_\beta(x) = \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + 1$$

La figure 4.7 donne une représentation graphique de la fonction  $M_1$

FIG. 4.7 – Graphe de  $M_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



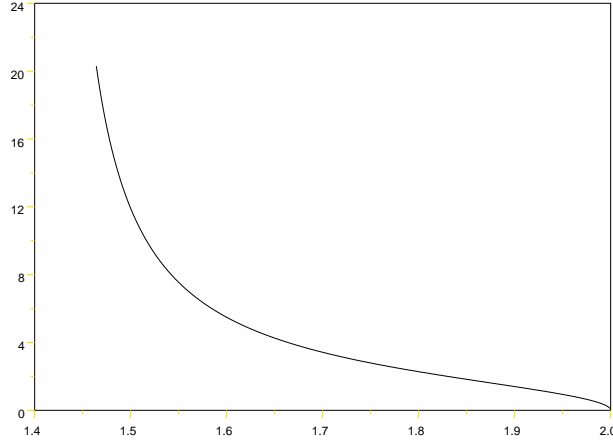
On peut ainsi vérifier que  $M_\beta$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$  et d'image  $]1, 2]$ . De plus, un petit calcul nous montre que, pour  $x \in ]1, 2]$ ,

$$M_\beta^{-1}(x) = \beta \frac{\sqrt{y(2-y)}}{y-1}.$$

On en déduit que pour  $x \in ]\sqrt{2}, 2]$ ,

$$\Psi_\beta(x) = \beta x^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-2}.$$

La figure 4.8 donne une représentation graphique de la fonction  $\Psi_1$ .

FIG. 4.8 – Graphe de  $\Psi_1 : x \mapsto x^2 \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2-2}}$ 

De plus, par le calcul et la définition de  $\alpha$ , on a

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \inf_{t>0} \left\{ 2 \frac{\beta(t^2 + \beta^2)^{-1/2} + 1}{|-\beta t(t^2 + \beta^2)^{-3/2}|} - t \right\} \\
 &= \inf_{t>0} \left\{ t + \frac{2\beta^2}{t} + 2 \frac{(t^2 + \beta^2)^{3/2}}{\beta t} \right\} \\
 &= \inf_{\beta t>0} \left\{ \beta t + \frac{2\beta^2}{\beta t} + 2 \frac{((\beta t)^2 + \beta^2)^{3/2}}{\beta^2 t} \right\} \\
 &= \beta \inf_{u>0} \left\{ u + \frac{2}{u} + 2 \frac{(u^2 + 1)^{3/2}}{u} \right\}.
 \end{aligned}$$

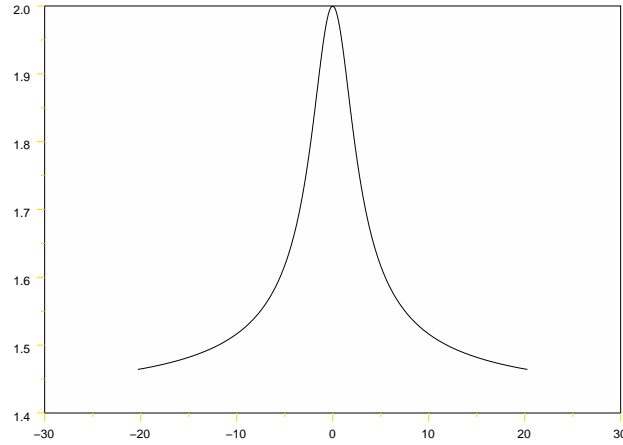
Notons

$$c = \inf_{u>0} \left\{ u + \frac{2}{u} + 2 \frac{(u^2 + 1)^{3/2}}{u} \right\}.$$

On vérifie facilement que  $c > 0$  (numériquement, on trouve  $c \approx 2,961$ ) et  $\alpha = c\beta$  donc (B6) est bien vérifiée. La proposition 4.21 nous affirme alors que  $\Psi_\beta$  est strictement décroissante d'image  $[0, +\infty[$ .

On en déduit qu'on peut définir  $\Psi_\beta^{-1}$  sa réciproque sur  $[0, +\infty[$ , que l'image de  $\Psi_\beta^{-1}$  est  $]\sqrt{2}, 2]$  et que  $\Psi_\beta^{-1}$  est  $\frac{1}{c\beta}$  lipschitzienne. On considère son prolongement paire à tout  $\mathbb{R}$ , noté  $\sigma_\beta$ . La fonction  $\sigma_\beta$  est alors aussi  $\frac{1}{c\beta}$  lipschitzienne.

La figure 4.9 donne une représentation graphique de la fonction  $\sigma_1$ .

FIG. 4.9 – Graphe de  $\sigma_1$  pour  $M_1(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 

Enfin, d'après la proposition 4.22, si  $k_\Phi < c\beta$ , la fonction  $(t, x) \mapsto Y_t^{t,x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}$  et solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \beta^2}} + 1 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R} \\ u(T, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

## 4.7 Quelques cas en dimension 2

Comme déjà annoncé, résoudre en toute dimension l'équation (4.22) n'est pas envisageable. On se persuade assez facilement que, dès la dimension 2, les calculs deviennent inextricables. Nous n'allons donc pas pouvoir ici résoudre le problème en toute généralité. Toutefois nous proposons 2 cas où les résultats obtenus en dimension 1 peuvent être généralisés. Dans ces 2 cas, la matrice  $M$  a la particularité d'être une matrice  $2 \times 2$  diagonale. Toujours dans un souci de simplification, on prendra  $f = g = 0$  et une matrice  $M$  ne dépendant que du gradient de la solution. On peut donc écrire

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \xi_1(x, y) & 0 \\ 0 & \xi_2(x, y) \end{pmatrix}$$

et l'équation aux dérivées partielles associée est alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + \xi_1(\nabla u(t, x, y)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi_2(\nabla u(t, x, y)) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pour } t \in ]0, T[, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(T, x, y) = \Phi(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.34)$$

### 4.7.1 Cas d'une matrice hyperdiagonale

Considérons tout d'abord le cas très simple où  $\xi_1$  ne dépend que de  $x$  et  $\xi_2$  ne dépend que de  $y$ . L'équation (4.22) se simplifie fortement, la matrice  $\sigma$  étant alors forcément diagonale. On doit alors à trouver des fonctions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  telles que

$$\begin{cases} \sigma_1(x)^2 = 2\xi_1 \left( \frac{x}{\sigma_1(x)} \right), \\ \sigma_2(x)^2 = 2\xi_2 \left( \frac{x}{\sigma_2(x)} \right). \end{cases} \quad (4.35)$$

On remarque également que  $\sigma$  vérifie (4.23) si et seulement si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  vérifient la condition (4.23). Il suffit donc de choisir des fonctions  $\xi_1$  et  $\xi_2$  vérifiant les jeux d'hypothèses (A1) – (A6) ou (B1) – (B6) et avec une fonction  $\Phi$  correctement choisie (c'est à dire telle que  $k_\sigma k_\Phi < 1$  d'après la remarque 4.18), on peut représenter la solution de l'équation aux dérivées partielles à l'aide du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades associé.

**Exemple 4.4** *En utilisant les conditions obtenues dans les exemples précédents, on peut représenter la solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{1}{\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + 1} + 1 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ln \left( \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + 2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & t \in ]0, T[ \times (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(T, x) = x + y, & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.36)$$

En effet, posons  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et considérons  $(X^{t,z}, Y^{t,z}, Z^{t,z})$  l'unique solution du système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

$$\begin{cases} X_s^1 = x + \int_t^s \sigma_1(Z_r^1) dB_r^1 \\ X_s^2 = y + \int_t^s \sigma_2(Z_r^2) dB_r^2 \\ Y_s = X_T^1 + X_T^2 - \int_s^T Z_r^1 d\bar{B}_r^1 - \int_s^T Z_r^2 d\bar{B}_r^2 \end{cases}$$

où  $\sigma_1$  est le prolongement paire de la fonction  $\Psi_1^{-1}$  quand on définit

$$\Psi_1 : \begin{cases} ]\sqrt{2}, 2] \rightarrow [0, +\infty[ \\ x \mapsto \frac{x(4-x^2)}{x^2-2} \end{cases}$$

et  $\sigma_2$  est le prolongement paire de la fonction  $\Psi_2^{-1}$  quand on définit

$$\Psi_2 : \begin{cases} [\sqrt{2 \ln 2}, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[ \\ x \mapsto x \left( \exp \left( \frac{x^2}{2} \right) - 2 \right). \end{cases}$$



La fonction  $u$  définie par  $u(t, z) = Y_t^{t, z}$  est continue sur  $[0, T[$  et est une solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles (4.36). Remarquons en effet que, sur cet exemple, avec le choix des normes euclidiennes,  $k_\Phi = \sqrt{2}$  et

$$\begin{aligned} k_\sigma &= \sqrt{k_{\sigma_1}^2 + k_{\sigma_2}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4 \ln 2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{1}{(\ln 2)^2}} \end{aligned}$$

donc  $k_\sigma k_\Phi < 1$  et toutes les conditions nécessaires sont vérifiées.

Bien évidemment, cet exemple se généralise en toute dimension en prenant une matrice  $M$  “hyperdiagonale” c’est à dire de la forme

$$M(x_1, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} g_1(x_1) & & & 0 \\ & g_2(x_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_d(x_d) \end{pmatrix},$$

#### 4.7.2 Cas d’une matrice diagonale avec un coefficient constant

Considérons maintenant un cas légèrement plus compliqué. On suppose toujours que  $M$  est diagonale mais cette fois, un des coefficients diagonaux est constant égal à  $\varepsilon > 0$ . Remarquons tout de suite que l’on ne peut prendre  $\varepsilon = 0$  car la matrice  $\sigma$  doit être inversible dans (4.23). On a donc ici

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \psi(x, y) & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et l’on étudie l’équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \psi(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pour } t \in ]0, T[, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(T, x, y) = \Phi(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.37)$$

Une matrice  $\sigma$  vérifiant (4.22) sera forcément de la forme

$$\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma_1(x, y) & 0 \\ 0 & \sqrt{2\varepsilon} \end{pmatrix}$$

et la condition (4.22) se traduira alors par l’équation

$$\sigma_1(x, y)^2 = 2\psi \left( \frac{x}{\sigma_1(x, y)}, \frac{y}{\sqrt{2\varepsilon}} \right).$$

Il suffit donc que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto \psi \left( x, \frac{y}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)$  vérifie les hypothèses (A1) – (A6) ou (B1) – (B6).

### 4.7.3 Cas d'une matrice diagonale aux coefficients localement inversibles

Continuons sur notre lancée, en considérant l'un des rares cas théorique où l'on peut effectuer quelques calculs et obtenir un résultat. Nous considérons ici que la fonction  $\xi(x, y) = (\xi_1(x, y), \xi_2(x, y))$  satisfait aux conditions

(C1) La fonction  $\xi$  est invariante par  $(x, y) \mapsto (-x, y)$  et  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ .

(C2) Pour tout  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ ,  $\xi_1(x, y) = x + \alpha_1(x, y)$  et  $\xi_2(x, y) = y + \alpha_2(x, y)$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des fonctions positives et de classe  $C^1$ .

(C3) Les dérivées partielles de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  vérifient

$$0 \leq \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} < \frac{1}{2} \quad 0 \leq \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right| < \frac{1}{2} \quad \left| \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \right| < \frac{1}{2}$$

(C4)  $\alpha_1(0, 0) > 0$  et  $\alpha_2(0, 0) > 0$

Sous ces hypothèses, la fonction  $\alpha(x, y) = (\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz strictement inférieure à 1. On en déduit par un résultat bien connu que la fonction  $\xi$  est inversible sur  $]0, +\infty[^2$ . Considérons  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  sa fonction réciproque, définie sur un ouvert  $V$  de  $]0, +\infty[^2$ . De plus, le jacobien de  $\xi$  étant toujours strictement positif, l'application  $\beta$  est différentiable sur  $V$  et sa différentielle est la réciproque de la différentielle de  $\xi$ . En particulier, en notant  $|D\xi|$  le jacobien de  $\xi$ , on obtient

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x} = \frac{1}{|D\xi|} \left( 1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial y} = \frac{1}{|D\xi|} \left( 1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right).$$

Notons, conformément au cas unidimensionnel, l'application  $\Psi$  par

$$\Psi : \begin{cases} V \rightarrow [0, +\infty[^2 \\ (x, y) \mapsto (x\beta_1(x^2/2, y^2/2), y\beta_2(x^2/2, y^2/2)). \end{cases}$$

La matrice jacobienne de  $\Psi$  est alors

$$D\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \beta_1(x^2/2, y^2/2) + x^2 \frac{\partial \beta_1}{\partial x}(x^2/2, y^2/2) & xy \frac{\partial \beta_1}{\partial y}(x^2/2, y^2/2) \\ xy \frac{\partial \beta_2}{\partial x}(x^2/2, y^2/2) & \beta_2(x^2/2, y^2/2) + y^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial y}(x^2/2, y^2/2) \end{pmatrix}$$

et son jacobien est donc (les différentes fonctions étant évaluées au point  $(x^2/2, y^2/2)$ )

$$|D\psi(x, y)| = \beta_1 \beta_2 + \left( x^2 \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + y^2 \beta_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \right) + x^2 y^2 \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \frac{\partial \beta_2}{\partial y} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right).$$

Par définition, on a  $\beta_1 \beta_2 \geq 0$ . Des expressions de  $\frac{\partial \beta_1}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \beta_2}{\partial y}$  et par l'hypothèse (C2), tous les termes du second terme de  $|D\psi|$  sont positifs. De plus, le dernier terme peut aussi se voir comme

$$x^2 y^2 |D\beta| = \frac{x^2 y^2}{|D\xi|}$$

qui est positif puisque  $(0, 0) \notin V$  par l'hypothèse (C4).

Par conséquent le jacobien de la fonction  $\Psi$  est toujours strictement positif et la fonction  $\Psi$  est

donc localement inversible partout. Par la caractérisation des compacts du théorème de Borel-Lebesgue, on peut définir une fonction  $\lambda(x, y) = (\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y))$  sur l'image de  $\Psi$  qui sera localement inversible partout et d'application réciproque  $\Psi$ .

Si de plus, l'image de  $\Psi$  est  $[0, +\infty[$ , il est facile de voir que la matrice définie par

$$\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, y) \end{pmatrix}$$

sur  $[0, +\infty[$  et prolongée à  $\mathbb{R}^2$  par symétrie, vérifie la condition (4.22).

#### 4.7.4 Exemple d'un cas incertain

Pour finir ce chapitre, nous présentons un exemple d'équation aux dérivées partielles où malheureusement, même si l'on est capable de résoudre la condition (4.22), pour des problèmes de régularité du coefficient  $\sigma$  obtenu, nous ne pouvons conclure comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Cet échec est fort dommageable, l'équation en question intervenant fréquemment en imagerie.

On s'intéresse ainsi à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{n}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{\tau}^2} = 0$$

où

$$\begin{cases} \vec{\tau} = \frac{(\partial u / \partial y, -\partial u / \partial x)}{\|\nabla u\|}, \\ \vec{n} = \frac{(\partial u / \partial x, \partial u / \partial y)}{\|\nabla u\|}. \end{cases} \quad (4.38)$$

On a

$$u((x, y) + h\vec{n}) = u(x, y) + h\nabla u \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}h^2\vec{n}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \vec{n}$$

et

$$u((x, y) + h\vec{\tau}) = u(x, y) + 0 + \frac{1}{2}h^2\vec{\tau}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \vec{\tau}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{\tau}^2} = \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{n}^2} = \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (4.39)$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{n}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{\tau}^2} = \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \left( \left[ \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 - \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + \left[ \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{n}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{\tau}^2} = \sum_{i,j} M(\nabla u)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

où

$$M(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} \varepsilon v^2 + u^2 & (1 - \varepsilon)uv \\ (1 - \varepsilon)uv & \varepsilon u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que l'on cherche  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow GL(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\sigma^t \sigma(u, v) = 2M({}^t \sigma(u, v))^{-1}(u, v)$$

### Idée permettant de trouver $\sigma$

On aimerait réécrire formellement l'équation précédente en :

$$(u, v) = [{}^t \sigma(u, v)] M^{-1}(\sigma^t \sigma(u, v)/2)$$

bien qu'il ne soit pas dit que l'on puisse inverser  $M$ . Si on peut définir,

$$\Psi : \begin{cases} GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ A \mapsto {}^t A M^{-1}(A^t A/2), \end{cases}$$

on a alors  $(u, v) = \Psi(\sigma(u, v))$  et donc " $\sigma(u, v) = \Psi^{-1}(u, v)$ ". Là encore  $\Psi$  n'a aucune raison d'être inversible.

Remarquons d'ailleurs que pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$M(\lambda \cdot (u, v)) = M(u, v)$$

et que réciproquement, si  $(u, v), (u', v') \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  vérifient  $M(u, v) = M(u', v')$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $(u, v) = \lambda \cdot (u', v')$ . On ne pourra donc inverser  $M$  même au voisinage d'un point. Profitons en pour remarquer que l'équation n'a pas une unique solution, car si  $\sigma$  est solution,  $-\sigma$  l'est également.

Pour aider à construire un  $\sigma$ , il peut être utile de remarquer que 1 et  $\varepsilon$  sont valeurs propres de  $M(u, v)$  et qu'il n'est pas très difficile d'obtenir

$$M(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}.$$

On va commencer par montrer que, pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ,  $\exists A \in GL_2(\mathbb{R})$  tel que  $M(u, v) = A^t A/2$  et déterminer tous les  $A$  possibles. En utilisant la diagonalisation précédente et l'homogénéité de  $M$ , on remarque que

$$A = \sqrt{\frac{2}{u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} u & -v\sqrt{\varepsilon} \\ v & u\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

est solution. On connaît donc toutes les solutions, ce sont les

$$\sqrt{\frac{2}{u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} u & -v\sqrt{\varepsilon} \\ v & u\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta(u, v) & s \sin \theta(u, v) \\ -\sin \theta(u, v) & s \cos \theta(u, v) \end{pmatrix}$$

où  $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $s \in \{-1, 1\}$ . Notons  $A(s, \theta)$  cette matrice. On a

$$A(s, \theta) = \sqrt{\frac{2}{u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} v\sqrt{\varepsilon} \sin \theta(u, v) + u \cos \theta(u, v) & s[-v\sqrt{\varepsilon} \cos \theta(u, v) + u \sin \theta(u, v)] \\ v \cos \theta(u, v) - u\sqrt{\varepsilon} \sin \theta(u, v) & s[v \sin \theta(u, v) + u\sqrt{\varepsilon} \cos \theta(u, v)] \end{pmatrix}$$

et

$${}^t A(1, \theta) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{2(u^2 + v^2)} \begin{pmatrix} \cos \theta(u, v) \\ \sin \theta(u, v) \end{pmatrix},$$

donc

$${}^t A(1, \theta(u, v)) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

lorsque  $\theta(u, v)$  est l'angle polaire du point de coordonnées  $(u, v)$ .

Heuristiquement, on a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1}(A(1, \theta) {}^t A(1, \theta)/2).$$

donc

$${}^t A(1, \theta) M^{-1}(A(1, \theta) {}^t A(1, \theta)/2) = \sqrt{2}(u, v)$$

Cela nous donne une idée de la forme que peut avoir  $\sigma$ .

En fait, on s'aperçoit qu'un  $\sigma$  qui convient est  $A(1, \theta)$ . En effet posons

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u^2 + \sqrt{\varepsilon}v^2 & (1 - \sqrt{\varepsilon})uv \\ (1 - \sqrt{\varepsilon})uv & v^2 + \sqrt{\varepsilon}u^2 \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\sigma \sigma^* = 2M(u, v)$$

$$\sigma^{-1}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}(u^2 + v^2)} \begin{pmatrix} v^2 + \sqrt{\varepsilon}u^2 & (\sqrt{\varepsilon} - 1)uv \\ (\sqrt{\varepsilon} - 1)uv & u^2 + \sqrt{\varepsilon}v^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\sigma^{-1}(u, v) \cdot (u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Or comme  $M(u, v) = M(\lambda(u, v))$  on a bien

$$\sigma \sigma^*(u, v) = 2M({}^t \sigma(u, v))^{-1}(u, v).$$

Malheureusement, la matrice  $\sigma$  ainsi obtenue n'est pas continue en  $(0, 0)$ , elle ne rentre donc pas dans le cadre des théorèmes vus dans ce chapitre.

## Chapitre 5

# Discrétisation des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées

Dans ce chapitre, les coefficients des équations différentielles stochastiques que nous considérerons seront toujours supposés **déterministes**.

Jusqu'en 2004, à notre connaissance aucun algorithme permettant de simuler la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades réellement couplées n'existait. Les seules implémentations disponibles concernaient des équations différentielles stochastiques rétrogrades dont la condition terminale dépend certes d'une équation différentielle stochastique progressive, mais indépendante de l'équation rétrograde.

Parmi celles-ci, on peut citer les travaux effectués par D.Chevance [7] lorsque le générateur de l'équation rétrograde ne dépend pas de  $Z$ , améliorés par Zhang [43] dans le cas où le générateur peut dépendre de  $Z$ , mais aussi les techniques de discrétisation aléatoires introduites par Bally [3], les techniques de quantification de Bally et Pagès [4], les méthodes de régression de Gobet et Lemor [18], ainsi que le schéma et l'analyse détaillée des erreurs d'approximation proposés par Bouchard et Touzi [6]. N'oublions pas l'approche différente proposée par Douglas, Ma et Protter [11], s'appuyant sur l'algorithme de résolution en quatre étapes de Ma, Protter et Young [28] et qui consiste à simuler numériquement l'équation aux dérivées partielles associée.

Ce lien entre équation aux dérivées partielles et système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades a permis à Delarue et Menozzi [9] de construire en 2004 un schéma numérique très efficace pour simuler les solutions d'un système où  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$  et suit une hypothèse de non dégénérescence. En effet, dans ce cas, on peut écrire que  $Y_s = u(s, X_s)$  et  $Z_s = v(s, X_s)$  avec  $u$  et  $v$  fonctions déterministes liées à la solution de l'équation aux dérivées partielles associée. Delarue et Menozzi prouvent ainsi que la fonction  $u$  est de classe  $C^{1,2}$  et  $v = \nabla_x u \sigma(t, x, u)$  est donc au moins continue. Avoir de la régularité sur  $v$  signifiant

avoir de la régularité sur  $Z$ , ils peuvent techniquement en évaluer l'erreur d'approximation.

Malheureusement, dans le cas où  $\sigma$  dépend de  $Z$ , on a beaucoup plus de mal à mesurer la régularité des fonctions  $u$  et  $v$  et par conséquent l'erreur d'approximation. De plus, dans notre cas on ne peut pas relier de manière systématique un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades à une équation aux dérivées partielles. Aussi n'avons nous pas poursuivi dans cette direction.

Le contrôle obtenu sur la constante de contraction du chapitre 3, nous a suggéré d'étudier une discrétisation où se mêle à la fois une itération de type point fixe et des techniques classiques à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades.

## 5.1 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques rétrogrades

Nous allons commencer par décrire la méthode introduite par Zhang [43] dans sa thèse sur le cas d'un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades simplifié. On se donne donc classiquement  $(B_s)_{s \in \mathbb{R}}$  un mouvement brownien à valeurs réelles et  $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$  sa filtration propre vérifiant les conditions habituelles. Nous considérons le système d'EDSPR suivant :

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s f(r, X_r) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r) dB_r \\ Y_s = \Phi(X_T) + \int_s^T g(r, X_r, Y_r) dr - \int_s^T Z_r dB_r \end{cases} \quad (5.1)$$

pour  $t \leq s \leq T$ . Nous supposons avoir pris des coefficients  $f, g$  et  $\sigma$  suffisamment réguliers pour qu'on puisse parler de la solution du système (5.1) sur  $[t, T]$ . Ce sera en particulier le cas si on les suppose lipschitziens en espace et höldérien d'ordre  $1/2$  en temps, où par définition

**Définition 5.1** Une fonction  $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  sera lipschitzienne en espace et  $\alpha$ -höldérienne en temps s'il existe des constantes  $C_1, C_2$  et  $C_3$  strictement positives telles que

$$\forall s, s' \in \mathbb{R}^+, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \forall y, y' \in \mathbb{R}, \\ \|\phi(s, x', y') - \phi(s, x, y)\| \leq C_1 |s - s'|^\alpha + C_2 \|x - x'\| + C_3 \|y - y'\|.$$

Pour plus de détails, on pourra consulter les résultats du chapitre 3.

Nous allons voir maintenant comment discrétiser les équations (5.1) dans le but d'obtenir numériquement une approximation des solutions.

Donnons nous une subdivision  $\pi(t = t_0 < \dots < t_p = T)$ . On a alors pour  $i$  fixé,

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, X_s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dB_s$$

et

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s, X_s, Y_s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s dB_s.$$

S'il semble naturel de proposer pour l'équation progressive la discrétisation eulérienne

$$\begin{cases} \hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, \hat{X}_{t_i}) + \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \\ \hat{X}_{t_0} = x, \end{cases} \quad (5.2)$$

obtenir des formules du même type, nous permettant d'approcher à la fois les  $Y_{t_i}$  et  $Z_{t_i}$  et cela simplement avec la seconde équation du système, nécessite quelques explications.

En effet, pour la seconde équation nous aimerions écrire également un schéma de type Euler de la forme

$$\hat{Y}_{t_i} = \hat{Y}_{t_{i+1}} + (t_{i+1} - t_i) g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}}) - \hat{Z}_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (5.3)$$

Malheureusement, l'équation (5.3) ne définit pas une variable  $\hat{Z}_{t_i}$   $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable. Pourtant si l'on pouvait définir de tels  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$ , nous aurions alors

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t_i} = E \left[ \hat{Y}_{t_{i+1}} + (t_{i+1} - t_i) g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ (t_{i+1} - t_i) \hat{Z}_{t_i} = E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (\hat{Y}_{t_{i+1}} - \hat{Y}_{t_i} + (t_{i+1} - t_i) g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}})) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right]. \end{cases} \quad (5.4)$$

Finalement, les équations (5.4) et la condition terminale  $\hat{Y}_T = \Phi(\hat{X}_T)$  définissent de façon unique des processus  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  constants par morceaux (en prolongeant  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  par  $\hat{X}_s = \hat{X}_{t_i}$  sur  $[t_i, t_{i+1}[$  et de même pour  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$ ), adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , même s'ils ne vérifient pas (5.3).

De manière à étudier la convergence des processus  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  définis par les relations (5.4) lorsque le pas de la subdivision  $|\pi| = \sup_{0 \leq i \leq p-1} (t_{i+1} - t_i)$  tend vers 0, il est plus judicieux d'introduire les processus  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  au moyen d'équations différentielles stochastiques rétrogrades. Cela permet entre autres d'utiliser tous les théorèmes classiques des équations différentielles stochastiques rétrogrades, comme ceux de comparaison, et ainsi d'obtenir une évaluation de l'erreur commise en remplaçant les processus  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  par leur discrétisation  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$ . Examinons cela d'un peu plus près.

Le schéma d'Euler pour l'équation différentielle stochastique progressive revient à considérer des coefficients constants par morceaux adaptés à la subdivision  $\pi$ . En appliquant le même procédé pour l'équation rétrograde mais en privilégiant les temps terminaux car on connaît  $Y_T$ , on pose alors  $\hat{Y}_T = \Phi(\hat{X}_T)$  et on considère la solution  $(U, V)$  sur  $[t_i, t_{i+1}[$  de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$U_t = \hat{Y}_{t_{i+1}} + (t_{i+1} - t) g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}}) - \int_t^{t_{i+1}} V_r dB_r \quad (5.5)$$



et on pose  $\hat{Y}_s = U_{t_i}$  et  $\hat{Z}_s = V_{t_i}$  sur  $[t_i, t_{i+1}[$ . On vérifie alors comme on l'espérait, que

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t_i} = E \left[ \hat{Y}_{t_{i+1}} + (t_{i+1} - t_i)g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \hat{Y}_T = \Phi(\hat{X}_T). \end{cases} \quad (5.6)$$

Il reste donc encore à démontrer la relation (5.4) pour les  $\hat{Z}_{t_i}$ . A cette fin, 2 lemmes techniques nous seront particulièrement utiles.

Comme le montre la formule (5.6) reliant  $\hat{Y}_{t_i}$ ,  $\hat{Y}_{t_{i+1}}$  et  $\hat{X}_{t_{i+1}}$ , nous aurons à simplifier de nombreuses espérances conditionnelles. Pour cela, on cherchera à décomposer les variables aléatoires suivant deux tribus indépendantes, l'une étant celle par rapport à laquelle on conditionne. Le premier lemme nous permet alors de simplifier l'espérance conditionnelle.

**Lemme 5.2** *On se donne 2 tribus indépendantes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . On considère alors  $X$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}$ -mesurable et  $Y$  une variable aléatoire  $\mathcal{G}$ -mesurable. Pour  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable relativement à la loi de  $(X, Y)$ , on a le résultat suivant*

$$\begin{aligned} E[f(X, Y)|\mathcal{G}] &= E[f(X, Y)|Y] \\ &= g(Y) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} g(y) &= E[f(X, y)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dP_X(x). \end{aligned}$$

#### Démonstration du lemme.

Par des arguments de classe monotone et de passage à la limite, il suffit de le vérifier pour  $f(x, y) = 1_{[a,b] \times [c,d]}(x, y)$ . Or, pour  $G \in \mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} E \left[ E(1_{X \in [a,b]} 1_{Y \in [c,d]} | \mathcal{G}) 1_G \right] &= E \left[ E(1_{X \in [a,b]}) 1_{Y \in [c,d]} 1_G \right] \\ &= E \left[ E(1_{X \in [a,b]} 1_{Y \in [c,d]} | Y) 1_G \right] \end{aligned}$$

et  $E[f(X, Y)|Y]$  est bien une variable aléatoire  $\mathcal{G}$ -mesurable. On a donc bien ici

$$E[f(X, Y)|\mathcal{G}] = E[f(X, Y)|Y].$$

Pour la dernière affirmation, il suffit, par le théorème de Radon-Nikodym, de considérer  $X$  et  $Y$  comme étant à densité par rapport à une même probabilité.

□

Le deuxième lemme donne quant à lui des précisions fort utiles concernant le processus obtenu par le théorème de représentation. Il ne s'applique par contre qu'à une variable aléatoire qui s'exprime comme une fonction du brownien.

**Lemme 5.3** *Supposons qu'une fonction lipschitzienne  $g$  vérifie*

$$g(B_T) = E[g(B_T)] + \int_0^T \nu_r dB_r.$$

*Alors  $(\nu_t)_t$  est une martingale et*

$$\begin{aligned} \nu_r &= \frac{E_N \left[ Ng(B_r + \sqrt{T-r}N) \right]}{\sqrt{T-r}}. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-r)}} \int_{\mathbb{R}} xg(B_r + \sqrt{T-r}x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{(T-r)\sqrt{2\pi(T-r)}} \int_{\mathbb{R}} xg(B_r + x) \exp\left(-\frac{x^2}{2(T-r)}\right) dx. \end{aligned}$$

**Démonstration du lemme.**

Commençons par supposer la fonction  $g$  de classe  $C^\infty$  avec des dérivées de tout ordre bornées. On vérifie d'abord que

$$E[g(B_T)|\mathcal{F}_s] = g(B_T) - \int_s^T \nu_r dB_r.$$

Considérons alors la fonction  $u$  solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta u = 0, & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors, par application de la formule d'Itô au processus  $u(s, B_s)$ , on obtient que le couple de processus

$$(u(s, B_s), (\nabla u)(s, B_s))$$

est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$Y_s = g(B_T) - \int_s^T Z_r dB_r.$$

Par unicité, on a donc

$$\begin{cases} u(s, B_s) = E[g(B_T)|\mathcal{F}_s] \\ \nu_s = (\nabla u)(s, B_s). \end{cases}$$

En particulier, en choisissant le brownien tel que  $B_t = x$ , on obtient l'expression explicite de la fonction  $u$  :

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} g(x+r) \exp\left(-\frac{r^2}{2(T-t)}\right) dr.$$

Puis, en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \nu_s &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \int_{\mathbb{R}} g'(B_s+r) \exp\left(-\frac{r^2}{2(T-s)}\right) dr \\ &= \frac{1}{(T-s)\sqrt{2\pi(T-s)}} \int_{\mathbb{R}} r g(B_s+r) \exp\left(-\frac{r^2}{2(T-s)}\right) dr. \end{aligned}$$

Lorsque  $g$  est juste lipschitzienne, par régularisation, on construit une suite  $(g_n)$  de fonctions de classe  $C^\infty$  à dérivées de tout ordre bornées et qui converge uniformément vers  $g$ . On a alors une suite  $(Y^n, Z^n)$  de processus vérifiant pour tout  $n$

$$Y_s^n = g_n(B_T) - \int_s^T Z_r^n dB_r.$$

D'après le théorème 3.5, on a convergence de  $Z^n$  vers  $\nu$  dans  $L^2$ , de l'expression

$$Z_s^n = \frac{1}{(T-s)\sqrt{2\pi(T-s)}} \int_{\mathbb{R}} r g_n(B_s+r) \exp\left(-\frac{r^2}{2(T-s)}\right) dr.$$

On déduit par identification des limites que

$$\nu_s = \frac{1}{(T-s)\sqrt{2\pi(T-s)}} \int_{\mathbb{R}} r g(B_s+r) \exp\left(-\frac{r^2}{2(T-s)}\right) dr.$$

□

Comme cas particulier des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades dont le coefficient  $\sigma$  ne dépend pas de  $Z$ , les solutions du système (5.1) présentent des propriétés particulièrement remarquables. En effet, il existe des fonctions déterministes  $u$  et  $v$  telles que  $Y_s = u(s, X_s)$  et  $Z_s = v(s, Y_s)$ . L'algorithme de Zhang consiste à déterminer explicitement et de façon récursive les fonctions  $u_i$  et  $v_i$  vérifiant  $\hat{Y}_{t_i} = u_i(\hat{X}_{t_i})$  et  $\hat{Z}_{t_i} = v_i(\hat{X}_{t_i})$ . Les formules exactes sont données par

**Théorème 5.4** On note  $A_t^{s,x} = x + f(s, x)(t-s) + \sigma(s, x)(B_t - B_s)$  et  $\Delta t_i = (t_i - t_{i-1})$  et on définit par recurrence

$$\begin{cases} u_p(x) = \Phi(x), & v_p(x) = 0 \\ u_{i-1}(x) = E \left[ u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x}) + g(t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, x}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x})) \Delta t_i \right] \\ v_{i-1}(x) = E \left[ \frac{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}{\Delta t_i} \left( u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x}) + g(t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, x}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, x})) \Delta t_i \right) \right]. \end{cases}$$

On a alors  $\hat{Y}_{t_i} = u_i(\hat{X}_{t_i})$  et  $\hat{Z}_{t_i} = v_i(\hat{X}_{t_i})$ .

**Démonstration.**

On procède bien évidemment par récurrence descendante sur  $i \in \{0, \dots, p\}$ . Pour  $i = p$ , le résultat est trivial. Supposons que le résultat est vrai au rang  $i \in \{1, \dots, p\}$  fixé et prouvons-le au rang  $i - 1$ . On a, en utilisant la définition de  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  par l'équation (5.5),

$$\hat{Y}_{t_{i-1}} = \hat{Y}_{t_i} + (t_i - t_{i-1})g(t_i, \hat{X}_{t_i}, \hat{Y}_{t_i}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_r dB_r,$$

$$\hat{Z}_{t_{i-1}} = V_{t_{i-1}},$$

et, par hypothèse de récurrence,  $\hat{Y}_{t_i} = u_i(\hat{X}_{t_i})$  et  $\hat{Z}_{t_i} = v_i(\hat{X}_{t_i})$ . On a donc

$$\hat{Y}_{t_{i-1}} = u_i(\hat{X}_{t_i}) + (t_i - t_{i-1})g(t_i, \hat{X}_{t_i}, u_i(\hat{X}_{t_i})) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_r dB_r.$$

Rappelons que  $\hat{X}$  vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t_i} &= \hat{X}_{t_{i-1}} + (t_i - t_{i-1})f(t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}) + \sigma(t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}. \end{aligned}$$

Cela conduit à la relation

$$\hat{Y}_{t_{i-1}} = E \left[ u_i \left( A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}} \right) + (t_i - t_{i-1})g \left( t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}) \right) \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right].$$

En remarquant que  $\hat{X}_{t_{i-1}}$  est indépendant de  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  et en utilisant le lemme 5.2, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t_{i-1}} &= E_i \left[ u_i \left( A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}} \right) + (t_i - t_{i-1})g \left( t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}) \right) \right] \\ &= u_{i-1}(\hat{X}_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

où  $E_i$  désigne le calcul de l'espérance par rapport à la variable  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  et  $u_{i-1}$  est définie comme dans l'énoncé du théorème. De plus, en écrivant

$$u_i \left( A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}} \right) + (t_i - t_{i-1})g \left( t_i, A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}, u_i(A_{t_i}^{t_{i-1}, \hat{X}_{t_{i-1}}}) \right) = G(\hat{X}_{t_{i-1}}, B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

on a

$$G(\hat{X}_{t_{i-1}}, B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = E_i \left[ G(\hat{X}_{t_{i-1}}, B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} V_r dB_r$$

et donc d'après le lemme 5.3 on a

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{t_{i-1}} &= V_{t_{i-1}} \\ &= E_i \left[ \frac{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} G(\hat{X}_{t_{i-1}}, B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right] \\ &= v_{i-1}(\hat{X}_{t_{i-1}}). \end{aligned}$$

□

**Remarque 5.5** Si on relie l'avant dernière égalité de la démonstration ci-dessus avec l'expression

$$\hat{Y}_{t_{i-1}} = E_i[G(\hat{X}_{t_{i-1}}, B_{t_i} - B_{t_{i-1}})],$$

on retrouve comme on pouvait s'y attendre que

$$(t_{i+1} - t_i)\hat{Z}_{t_i} = E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(\hat{Y}_{t_{i+1}} - \hat{Y}_{t_i} + (t_{i+1} - t_i)g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}})) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right].$$

On rappelle que les processus  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  sont constants par morceaux de subdivision adaptée  $\pi = (t = t_0 \dots t_p = T)$ . La convergence du schéma d'Euler pour une diffusion a déjà été étudiée de manière approfondie. D'après les résultats obtenus dans [7] ou [25], on a une majoration précise de l'erreur commise dans l'approximation de  $X$  par  $\hat{X}$ . Zhang nous livre de plus une évaluation de l'erreur de l'approximation de  $Y$  et  $Z$  par  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  ce que nous résumons par

**Théorème 5.6** Si l'on suppose dans (5.1) que les coefficients  $f, \sigma, g$  et  $\Phi$  sont lipschitziens en espace et que  $f, \sigma, g$  sont höldériens d'ordre  $1/2$  en temps, alors il existe  $C > 0$  tel que

$$\sup_{t \leq s \leq T} E \left[ |Y_s - \hat{Y}_s|^2 \right] + E \left[ \int_t^T |Z_s - \hat{Z}_s|^2 ds \right] \leq C(1 + |x|^2)|\pi|.$$

**Remarque 5.7** Zhang propose même dans [43] une discrétisation qui généralise la précédente au cas où  $g$  dépend de  $Z$ , avec au final les mêmes majorations d'erreurs. Nous avons toutefois privilégié la clarté, en ne considérant que le cas simplifié où  $g$  ne dépend que de  $t, X$  et  $Y$ , la discrétisation pour les hypothèses optimales n'étant pas utile dans la suite et plus lourde techniquement.

## 5.2 Discrétisation des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

On aimerait désormais appliquer le même procédé au cas général qui nous préoccupe, c'est à dire au système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{cases} dX_s = f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s)dB_s \\ dY_s = -g(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + Z_s dB_s \\ X_t = x \\ Y_T = \Phi(X_T). \end{cases} \quad (5.7)$$

Nous cherchons donc à obtenir de manière unique des processus  $\hat{X}, \hat{Y}$  et  $\hat{Z}$  constants par morceaux de subdivision adaptée  $\pi$  (avec  $\hat{X} = \hat{X}_{t_i}$  sur  $[t_i, t_{i+1}[$  et de même pour  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$ ) au moyen

d'un système d'équations inspiré de (5.7). Malheureusement pour le cas général la discrétisation de subdivision  $\pi$  devient le schéma

$$\begin{cases} \hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, \hat{X}_{t_i}, \hat{Y}_{t_i}, \hat{Z}_{t_i}) + \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}, \hat{Y}_{t_i}, \hat{Z}_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ \hat{Y}_{t_i} = E \left[ \hat{Y}_{t_{i+1}} + (t_{i+1} - t_i)g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}}, \hat{Z}_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ (t_{i+1} - t_i)\hat{Z}_{t_i} = E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(\hat{Y}_{t_{i+1}} - \hat{Y}_{t_i} + (t_{i+1} - t_i)g(t_{i+1}, \hat{X}_{t_{i+1}}, \hat{Y}_{t_{i+1}}, \hat{Z}_{t_{i+1}})) \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ \hat{X}_{t_0} = x \\ \hat{Y}_{t_p} = \Phi(\hat{X}_{t_p}) \end{cases}$$

Malheureusement ce schéma n'est pas exploitable. En effet, avec un tel couplage une étape de l'algorithme nécessite d'avoir toute la trajectoire de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  qui n'est pas connue par définition même de schéma.

Utiliser un algorithme itératif permet de résoudre ce problème. En effet, on obtient alors des suites de variables aléatoires à 2 indices,  $i$  pour l'indice temporel,  $n$  pour l'indice d'itération. On fait alors en sorte que le calcul par exemple de  $\hat{Y}_{t_i}^n$  ne nécessite que des variables d'itération  $k$  avec  $k \leq n - 1$  donc supposée connue et des variables d'itération  $n$  déjà connues. On va donc s'intéresser à la suite de processus  $(X_n, Y_n, Z_n)$  définie par

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = \Psi^{t,x}(X_n, Y_n, Z_n)$$

où l'application  $\Psi^{t,x}$  est l'application contractante définie au chapitre 3 en 3.2.2 B]. L'intérêt est que, d'après le théorème 2.6 du chapitre 2, on sait que la suite  $(X_n, Y_n, Z_n)$  est convergente de limite la solution  $(X, Y, Z)$  que l'on cherche, mais aussi que la convergence est géométrique, de raison le rayon spectral de la matrice donnée à la proposition 3.11 du même chapitre. Nous envisageons de considérer d'une certaine manière une discrétisation de  $(X_n, Y_n, Z_n)$ , et d'évaluer au bout de  $n$  itérations l'erreur commise en fonction du pas de discrétisation choisi. Une manière de le formuler est d'écrire que l'on considère la suite  $(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{Z}^n)$  de processus constants par morceaux telle que

$$(\hat{X}^{n+1}, \hat{Y}^{n+1}, \hat{Z}^{n+1}) = (\Delta_\pi \circ \Psi^{t,x})(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{Z}^n)$$

où  $\Delta_\pi$  est un opérateur de discrétisation sur la subdivision  $\pi$ . En fait, pour être parfaitement rigoureux l'opérateur  $\Delta_\pi$  n'est défini que sur l'image de  $\Psi^{t,x}$ .

Dans un souci de clarté, on omettra d'indiquer la dépendance en  $t$  et  $x$  des différents processus et de l'application  $\Psi^{t,x}$ .

On supposera dans la suite de ce chapitre que les coefficients  $f, g, \sigma$  et  $\Phi$  sont bornés, de classe  $C^1$  et de dérivées partielles bornées en espace et höldériennes en temps. On notera souvent la notation  $\Theta$  indicé ou non pour désigner le triplet  $(X, Y, Z)$ . On considère donc les processus constants  $(X^0, Y^0, Z^0) \in \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{t,T}^c(\mathbb{R})$  définis par

$$\begin{cases} X^0 = x \\ Y^0 = \Phi(x) \\ Z^0 = 0 \end{cases}$$

et on définit

$$\begin{cases} \Theta^0 = \bar{\Theta}^0 = \hat{\Theta}^0 = (X^0, Y^0, Z^0) \\ \Theta^{n+1} = \Psi(\Theta^n) \\ \bar{\Theta}^{n+1} = \Psi(\hat{\Theta}^n) \\ \hat{\Theta}^{n+1} = \Delta_\pi(\bar{\Theta}^{n+1}) \end{cases}$$

soit de façon plus précise

$$\begin{cases} X_s^{n+1} = x + \int_t^s f(r, X_r^n, Y_r^n, Z_r^n)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^n, Y_r^n, Z_r^n)dB_r \\ Y_s^{n+1} = \Phi(X_T^{n+1}) + \int_s^T g(r, X_r^n, Y_r^n, Z_r^n)dr - \int_s^T Z_r^{n+1}dB_r. \end{cases}$$

On sait déjà que la suite  $\Theta^n = (X^n, Y^n, Z^n)$  converge vers la solution  $\Theta = (X, Y, Z)$  de (5.7) avec une vitesse géométrique. On a également

$$\begin{cases} \bar{X}_s^{n+1} = x + \int_t^s f(r, \hat{X}_r^n, \hat{Y}_r^n, \hat{Z}_r^n)dr + \int_t^s \sigma(r, \hat{X}_r^n, \hat{Y}_r^n, \hat{Z}_r^n)dB_r, \\ \bar{Y}_s^{n+1} = \Phi(\bar{X}_T^{n+1}) + \int_s^T g(r, \hat{X}_r^n, \hat{Y}_r^n, \hat{Z}_r^n)dr - \int_s^T \bar{Z}_r^{n+1}dB_r. \end{cases} \quad (5.8)$$

$\bar{\Theta}^n = (\bar{X}^n, \bar{Y}^n, \bar{Z}^n)$  interviendra naturellement dans les calculs d'erreur comme étape intermédiaire.

Tout comme dans le cas plus simple vu précédemment, pour définir  $\hat{\Theta}^{n+1}$  en utilisant la formulation des équations progressives rétrogrades, on considère  $\hat{\Theta}^{n+1} = (\tilde{X}^{n+1}, \tilde{Y}^{n+1}, \tilde{Z}^{n+1})$  défini par

$$\begin{cases} \tilde{X}_{t_0}^{n+1} = x \\ \tilde{Y}_T^{n+1} = \Phi(\tilde{X}_T^{n+1}) \end{cases}$$

et, sur  $[t_i; t_{i+1}[$ ,

$$\begin{cases} \tilde{X}_s^{n+1} = \tilde{X}_{t_i}^{n+1} + (s - t_i)f(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n) + \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n)(B_s - B_{t_i}) \\ \tilde{Y}_s^{n+1} = \tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} + (t_{i+1} - s)g(t_i, \hat{X}_{t_i}^n, \hat{Y}_{t_i}^n, \hat{Z}_{t_i}^n) - \int_s^{t_{i+1}} \tilde{Z}_r^{n+1}dB_r. \end{cases} \quad (5.9)$$

$\tilde{\Theta}^n$  joue le même rôle que les processus  $U, V$  dans les relations (5.5) et (5.6). On peut alors considérer les processus constants par morceaux  $\hat{X}^{n+1}, \hat{Y}^{n+1}, \hat{Z}^{n+1}$  en posant

$$\begin{cases} \hat{X}_{t_i}^{n+1} = \tilde{X}_{t_i}^{n+1}, \\ \hat{Y}_{t_i}^{n+1} = \tilde{Y}_{t_i}^{n+1}, \\ \hat{Z}_{t_i}^{n+1} = \tilde{Z}_{t_i}^{n+1}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Au bout de  $n$  itérations, l'erreur commise en considérant  $(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{Z}^n)$  dans l'approximation de  $(X, Y, Z)$  est majorée par la somme de 2 erreurs. La première est l'erreur d'approximation géométrique faite en considérant  $(X^n, Y^n, Z^n)$  plutôt que  $(X, Y, Z)$ . La seconde est l'erreur de

discrétisation faite en étudiant  $(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{Z}^n)$  en lieu et place de  $(X^n, Y^n, Z^n)$ . Les quelques lignes suivantes nous montrent que, si l'on contrôle, sur les  $n$  premières itérations, l'erreur engendrée par l'opérateur  $\Delta_\pi$  en fonction du pas de la subdivision, alors on peut évaluer l'erreur de discrétisation.

Comme  $\Psi$  est  $\rho$  contractante, au bout de  $n$  itérations, s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\| &= \sup_{0 \leq k \leq n} \|\Delta_\pi(\bar{\Theta}^k) - \bar{\Theta}^k\| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

alors on a, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{\Theta}^k - \Theta^k\| &\leq \|\hat{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\| + \|\bar{\Theta}^k - \Theta^k\| \\ &\leq \varepsilon + \|\Psi(\hat{\Theta}^{k-1}) - \Psi(\Theta^{k-1})\| \\ &\leq \varepsilon + \rho \|\hat{\Theta}^{k-1} - \Theta^{k-1}\| \end{aligned}$$

et, comme  $\hat{\Theta}^0 = \Theta^0$ , on a  $\sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \Theta^k\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho}$ .

En conclusion, on a pour tout  $n$ ,

$$\|\hat{\Theta}^n - \Theta\| \leq \|\hat{\Theta}^n - \Theta^n\| + \|\Theta^n - \Theta\| \quad (5.11)$$

$$\leq \frac{1}{1 - \rho} \cdot \sup_{0 \leq k \leq n} \|\Delta_\pi(\bar{\Theta}^k) - \bar{\Theta}^k\| + \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|\Theta^1 - \Theta^0\|. \quad (5.12)$$

L'objectif est donc de majorer en fonction de  $|\pi|$ , la quantité  $\sup_{0 \leq k \leq n} \|\Delta_\pi(\bar{\Theta}^k) - \bar{\Theta}^k\|$ , c'est à dire  $\sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\|$ . Nous l'étudierons séparément au travers des quantités  $\sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \tilde{\Theta}^k\|$  et  $\sup_{0 \leq k \leq n} \|\tilde{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\|$ . Nous verrons alors que prouver la convergence de cette discrétisation est étroitement lié au comportement de la suite des processus  $(\tilde{Z}^n)$ .

## 5.3 Formules de discrétisation

La suite de processus  $\tilde{\Theta}_n = (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{Z}_n)$  est définie comme la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde dont les coefficients sont constants par morceaux mais dépendant de l'itération antérieure du processus. Nous allons voir, de manière équivalente aux résultats de Zhang, que l'on peut exprimer les valeurs des processus  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{Z}$  sur la subdivision associée aux coefficients en fonction des valeurs prises par le processus  $\tilde{X}$ . D'une certaine manière, à cette étape on peut considérer que l'introduction de  $\Psi$  permet d'obtenir des expressions explicites des espérances conditionnelles mises en jeu. Par comparaison avec les résultats de Zhang, la complexité de l'équation rétrograde se fera ressentir au travers de ces fameuses fonctions. Alors que les fonctions de Zhang ne dépendent que d'un seul paramètre, l'itération de Picard entraîne qu'à l'itération  $n$ , les fonctions que nous obtenons dépendent de tout le passé itératif du processus  $\tilde{X}$ , c'est à dire de  $n$  variables. En effet



**Théorème 5.8** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, p\}$ , il existe des fonctions  $u_k^n$  et  $v_k^n$  déterministes définies sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  à valeurs réelles telles que,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, \dots, p\}$ ,

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{t_k}^n = u_k^n(\tilde{X}_{t_k}^j; j \leq n) \\ \tilde{Z}_{t_k}^n = v_k^n(\tilde{X}_{t_k}^j; j \leq n). \end{cases}$$

De plus, les fonctions  $u_k^n$  et  $v_k^n$  sont définies par :

$$\begin{cases} u_p^n(x_0, \dots, x_n) = \Phi(x_n), & v_p^n(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ u_k^0(x_0) = \Phi(x_0) \\ v_k^0(x_0) = 0, & \forall k \in \{0, \dots, p\} \end{cases} \quad (5.13)$$

et pour  $k < p$ , et  $N$  une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite,

$$\begin{cases} u_k^n(x_0, \dots, x_n) = E[u_{k+1}^n(x_0, X'_1, \dots, X'_n)] + \\ \quad (t_{k+1} - t_k)g(t_k, x_{n-1}, u_k^{n-1}(x_j; j \leq n-1), v_k^{n-1}(x_j; j \leq n-1)) \\ v_k^n(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} E[N \cdot u_{k+1}^n(x_0, X'_1, \dots, X'_n)] \end{cases} \quad (5.14)$$

où

$$\begin{aligned} X'_j = x_j + (t_{k+1} - t_k)f\left(t_k, x_{j-1}, u_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1), v_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1)\right) + \\ \sigma\left(t_k, x_{j-1}, u_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1), v_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1)\right)\sqrt{t_{k+1} - t_k}N. \end{aligned}$$

### Démonstration.

Considérons les fonctions  $u_j^k$  et  $v_j^k$  définies par les relations (5.13) et (5.14). On prouve, par récurrence sur  $n \geq 0$ , la proposition

$$H_n : \forall k \leq n, \forall 0 \leq j \leq p, \tilde{Y}_{t_j}^k = u_j^k(\tilde{X}_{t_j}^l; l \leq k) \text{ et } \tilde{Z}_{t_j}^k = v_j^k(\tilde{X}_{t_j}^l; l \leq k).$$

- Pour  $n = 0$  et  $j \in \{0, \dots, p\}$ , par définition,  $\tilde{Y}_j^n = \Phi(x)$ ,  $\tilde{X}_j^n = x$  et  $\tilde{Z}_j^n = 0$ . Donc, d'après (5.13),  $H_0$  est vraie.
- Supposons que pour  $n \geq 0$  fixé,  $H_n$  soit vraie.  
On a alors

$$\forall k \leq n, \forall 0 \leq j \leq p, \tilde{Y}_{t_j}^k = u_j^k(\tilde{X}_{t_j}^l; l \leq k) \text{ et } \tilde{Z}_{t_j}^k = v_j^k(\tilde{X}_{t_j}^l; l \leq k).$$

Pour montrer  $H_{n+1}$ , il reste à montrer que

$$\forall 0 \leq j \leq p, \tilde{Y}_{t_j}^{n+1} = u_j^{n+1}(\tilde{X}_{t_j}^l; l \leq n+1) \text{ et } \tilde{Z}_{t_j}^{n+1} = v_j^{n+1}(\tilde{X}_{t_j}^l; l \leq n+1).$$

On montre cela par une récurrence descendante sur  $j$ .

- On a  $\tilde{Y}_T^{n+1} = \Phi(\tilde{X}_T^{n+1})$  et  $\tilde{Z}_T^{n+1} = 0$ . Donc on a bien

$$\begin{cases} \tilde{Y}_T^{n+1} = u_p^{n+1}(\tilde{X}_T^l; l \leq n+1) \\ \tilde{Z}_T^{n+1} = v_p^{n+1}(\tilde{X}_T^l; l \leq n+1) \end{cases}$$

d'après (5.13).

- Supposons que ce soit vrai pour  $j = i + 1 \leq p$ , montrons que le résultat est vrai pour  $j = i$ . De

$$\tilde{Y}_{t_i}^{n+1} = \tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} + (t_{i+1} - t_i)g(t_i, \tilde{X}_{t_i}^n, \tilde{Y}_{t_i}^n, \tilde{Z}_{t_i}^n) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_r^{n+1} dB_r, \quad (5.15)$$

on déduit

$$\tilde{Y}_{t_i}^{n+1} = E[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} | \mathcal{F}_{t_i}] + (t_{i+1} - t_i)g(t_i, \tilde{X}_{t_i}^n, \tilde{Y}_{t_i}^n, \tilde{Z}_{t_i}^n) \quad (5.16)$$

et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour  $j = i + 1$  appliquée à  $\tilde{Y}^{n+1}$ , on obtient

$$\tilde{Y}_{t_i}^{n+1} = E[u_{i+1}^{n+1}(\tilde{X}_{t_{i+1}}^k; k \leq n+1) | \mathcal{F}_{t_i}] + (t_{i+1} - t_i)g(t_i, \tilde{X}_{t_i}^n, \tilde{Y}_{t_i}^n, \tilde{Z}_{t_i}^n).$$

En notant pour tout  $i$  et tout  $k$

$$\begin{aligned} f_{i,k} &= (t_{i+1} - t_i)f(t_i, \tilde{X}_{t_i}^k, \tilde{Y}_{t_i}^k, \tilde{Z}_{t_i}^k) \\ g_{i,k} &= (t_{i+1} - t_i)g(t_i, \tilde{X}_{t_i}^k, \tilde{Y}_{t_i}^k, \tilde{Z}_{t_i}^k) \\ \sigma_{i,k} &= \sigma(t_i, \tilde{X}_{t_i}^k, \tilde{Y}_{t_i}^k, \tilde{Z}_{t_i}^k), \end{aligned}$$

on remarque que  $f_{i,k}$ ,  $g_{i,k}$  et  $\sigma_{i,k}$  sont  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables, puis, en utilisant la relation de discrétisation de  $\tilde{X}^k$  pour  $k \in \{0, \dots, n+1\}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{t_i}^{n+1} &= E\left[u_{i+1}^{n+1}(\tilde{X}_{t_{i+1}}^0, \tilde{X}_{t_i}^k + f_{i,k-1} + \sigma_{i,k-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}); 1 \leq k \leq n+1) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] + g_{i,n} \\ &= E\left[u_{i+1}^{n+1}(\tilde{X}_{t_i}^0, \tilde{X}_{t_i}^k + f_{i,k-1} + \sigma_{i,k-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}); 1 \leq k \leq n+1) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] + g_{i,n} \\ &= E\left[u_{i+1}^{n+1}(\tilde{X}_{t_i}^0, \tilde{X}_{t_i}^k + f_{i,k-1} + \sigma_{i,k-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}); 1 \leq k \leq n+1) + g_{i,n} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]. \end{aligned}$$

Or, par l'hypothèse  $H_n$  on a pour  $k \leq n$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{t_i}^k &= u_i^k(\tilde{X}_{t_i}^l; l \leq k), \\ \tilde{Z}_{t_i}^k &= v_i^k(\tilde{X}_{t_i}^l; l \leq k). \end{aligned}$$

En utilisant ces deux identités dans l'expression de  $f_{i,k}$ ,  $\sigma_{i,k}$  et  $g_{i,n}$ , on obtient

$$\tilde{Y}_{t_i}^k = E\left[\chi((\tilde{X}_{t_i}^k, k \leq n), B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

où

$$\begin{aligned} \chi((x_k, k \leq n), y) &= u_{i+1}^{n+1}(x_0, x_i + \tilde{f}_{i,k-1} + \tilde{\sigma}_{i,k-1} \cdot y; 1 \leq k \leq n+1) - \tilde{g}_{i,n} \\ \tilde{f}_{i,k} &= (t_{i+1} - t_i)f(t_i, x_k, u_i^k(x_l, l \leq k), v_i^k(x_l, l \leq k)) \\ \tilde{g}_{i,k} &= (t_{i+1} - t_i)g(t_i, x_k, u_i^k(x_l, l \leq k), v_i^k(x_l, l \leq k)) \\ \tilde{\sigma}_{i,k} &= \sigma(t_i, x_k, u_i^k(x_l, l \leq k), v_i^k(x_l, l \leq k)). \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{F}_{t_i}$  et  $\sigma(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  sont des tribus indépendantes, on peut appliquer le lemme 5.2. En notant  $N$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, on obtient que

$$\tilde{Y}_{t_i}^{n+1} = \Lambda(\tilde{X}_{t_i}^k, k \leq n+1)$$

où

$$\begin{aligned}\Lambda(x_k, k \leq n) &= E\left[\chi((x_k, k \leq n), \sqrt{t_{i+1} - t_i} N)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2) \chi((x_k, k \leq n), \sqrt{t_{i+1} - t_i} x) dx.\end{aligned}$$

On retrouve donc bien d'après (5.14) que  $\tilde{Y}_{t_i}^{n+1} = u_i^{n+1}(\tilde{X}_{t_i}^k, k \leq n+1)$ .

Prouvons maintenant que pour  $j \in \{0 \dots p\}$ ,  $\tilde{Z}_{t_j}^{n+1} = v_j^{n+1}(\tilde{X}_{t_j}^k, k \leq n+1)$ . De (5.15) et (5.16), on déduit que

$$\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} = E[\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} | \mathcal{F}_{t_i}] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_r^{n+1} dB_r. \quad (5.17)$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\tilde{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} = u_{i+1}^{n+1}(\tilde{X}_{t_i}^0, \tilde{X}_{t_i}^j + f_{i,j-1} + \sigma_{i,j-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}); 1 \leq j \leq n+1)$$

Notons

$$\Upsilon(x) = u_{i+1}^{n+1}(\tilde{X}_{t_i}^0, \tilde{X}_{t_i}^j + f_{i,j-1} + \sigma_{i,j-1} \cdot x; 1 \leq j \leq n+1).$$

Alors, l'équation 5.17 se réécrit

$$\Upsilon(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = E[\Upsilon(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_r^{n+1} dB_r.$$

$\Upsilon(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  dépend de  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$  et des  $(\tilde{X}_{t_i}^j)_{0 \leq j \leq n+1}$  qui sont  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurables. Comme la variable  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$  est indépendante de  $\mathcal{F}_{t_i}$ , on peut appliquer le lemme 5.2 et obtenir

$$\Upsilon(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = E_i[\Upsilon(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_r^{n+1} dB_r$$

où on a noté  $E_i$  l'espérance calculée par rapport à  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . Par application du lemme 5.3 on obtient alors que

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{t_i}^{n+1} &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} E_i[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \Upsilon(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} E_N[N \Upsilon(\sqrt{t_{i+1} - t_i} N)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} \int_{\mathbb{R}} x \exp(-x^2/2) \Upsilon(\sqrt{t_{i+1} - t_i} x) dx.\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\tilde{Z}_{t_i}^{n+1} = v_i^{n+1}(\tilde{X}_{t_i}^k; k \leq n+1).$$

Cela achève la récurrence descendante sur  $j$  et donc la récurrence sur  $n$ .

□

**Corollaire immédiat** avec les notations du théorème précédent, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t_k}^n = u_k^n(\hat{X}_{t_k}^j; j \leq n) \\ \hat{Z}_{t_k}^n = v_k^n(\hat{X}_{t_k}^j; j \leq n). \end{cases}$$

On voit donc que l'on peut calculer récursivement la suite de processus  $\hat{\Theta}^n = (\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{Z}^n)$  sur la subdivision  $\pi$ . Force est de constater que si théoriquement ce résultat est intéressant, d'un point de vue pratique, il peut être à la fois coûteux en temps (en raison des innombrables calculs d'espérances) et coûteux en mémoire (si l'on cherche à gagner de la vitesse en stockant les données, on doit garder en mémoire toutes les itérations).

Nous avons obtenu une écriture explicite et récurrente du processus  $\tilde{Z}$  sur la subdivision  $\pi$ . Il peut être utile d'obtenir une expression de  $\tilde{Z}$  sur tout  $[t, T]$ .

Considérons donc, d'après ce qui précède, les fonctions  $u_k^n$  et  $v_k^n$  telles que

$$\begin{cases} \tilde{Y}_k^n = u_k^n(\tilde{X}_{t_k}^j; j \leq n) \\ \tilde{Z}_k^n = v_k^n(\tilde{X}_{t_k}^j; j \leq n). \end{cases}$$

On rappelle que

$$\begin{cases} u_p^n(x_0, \dots, x_n) = \Phi(x_n), & v_p^n(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ u_k^0(x_0) = \Phi(x_0) \\ v_k^0(x_0) = 0, & \forall k \in \{0, \dots, p\} \end{cases} \quad (5.18)$$

et que

$$\begin{cases} u_k^n(x_0, \dots, x_n) = E[u_{k+1}^n(x_0, X'_1, \dots, X'_n)] + \\ \quad (t_{k+1} - t_k)g(t_k, x_{n-1}, u_k^{n-1}(x_j; j \leq n-1), v_k^{n-1}(x_j; j \leq n-1)) \\ v_k^n(x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} E[N \cdot u_{k+1}^n(x_0, X'_1, \dots, X'_n)] \end{cases} \quad (5.19)$$

où

$$\begin{aligned} X'_j &= x_j + (t_{k+1} - t_k)f\left(t_k, x_{j-1}, u_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1), v_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1)\right) + \\ &\quad \sigma\left(t_k, x_{j-1}, u_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1), v_k^{j-1}(x_l; l \leq j-1)\right)\sqrt{t_{k+1} - t_k} N. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on utilisera l'expression  $\tilde{\Theta}_k^n = (\tilde{X}_{t_k}^n, \tilde{Y}_{t_k}^n, \tilde{Z}_{t_k}^n)$ . On montre alors que

**Proposition 5.9** Pour  $t_k \leq s < t_{k+1}$ , on a

$$\begin{cases} \tilde{Y}_s^{n+1} = E_N \left[ u_{k+1}^{n+1} \left( \tilde{X}_s^j + (t_{k+1} - s)f(t_k, \tilde{\Theta}_k^{j-1}) + \sigma(t_k, \tilde{\Theta}_k^{j-1})\sqrt{t_{k+1} - s} N; j \leq n+1 \right) \right] + \\ (t_{k+1} - s)g(t_k, \tilde{\Theta}_k^n) \\ \tilde{Z}_s^{n+1} = \frac{E_N \left[ N \cdot u_{k+1}^{n+1} \left( \tilde{X}_s^j + (t_{k+1} - s)f(t_k, \tilde{\Theta}_k^{j-1}) + \sigma(t_k, \tilde{\Theta}_k^{j-1})\sqrt{t_{k+1} - s} N; j \leq n+1 \right) \right]}{\sqrt{t_{k+1} - s}}. \end{cases}$$

**Démonstration.**

On reprend la démonstration donnant l'expression des  $u_k^n$  et  $v_k^n$  en remarquant que

$$\tilde{Y}_s^{n+1} = E \left[ u_{k+1}^{n+1} \left( X_{t_{k+1}}^j; j \leq n+1 \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] + (t_{k+1} - s)g(t_k, \Theta_k^n)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{t_{k+1}}^{n+1} &= u_{k+1}^{n+1} \left( X_s^j + (t_{k+1} - s)f(t_k, \Theta_k^{j-1}) + \sigma(t_k, \Theta_k^{j-1})(B_{t_{k+1}} - B_s); j \leq n+1 \right) \\ &= E_N \left[ u_{k+1}^{n+1} \left( X_s^j + (t_{k+1} - s)f(t_k, \Theta_k^{j-1}) + \sigma(t_k, \Theta_k^{j-1})\sqrt{t_{k+1} - s} N; j \leq n+1 \right) \right] \\ &\quad + \int_s^{t_{k+1}} \tilde{Z}_r^{n+1} dB_r. \end{aligned}$$

□

Avant de passer à une étude générale et d'évoquer les difficultés que cela suscite, nous nous proposons d'aborder en premier lieu le cas d'un exemple très simple où les calculs sont explicites et permettent de justifier la convergence de la discrétisation au moyen de simulations.

## 5.4 Etude d'un exemple particulier

On s'intéresse au système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades suivant :

$$\begin{cases} X_s = x + \int_0^s AX_r dr + \int_0^s \sigma(Z_r) dB_r \\ Y_s = BX_T - \int_s^T Z_r dB_r. \end{cases} \quad (5.20)$$

Pour des réels  $A, B$  et  $T$  tels que  $k_\sigma B e^{AT} < 1$ , on peut considérer la fonction réelle  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $z(r)$  point fixe de l'application  $x \mapsto B e^{A(T-r)} \sigma(x)$  pour tout  $r \in [0, T]$ .

On peut alors résoudre explicitement (ou le vérifier par l'unicité d'une solution à cette EDSPR)

et obtenir

$$\begin{cases} X_s = e^{As} \left( x + \int_0^s e^{-Ar} \sigma(z_r) dB_r \right) \\ Y_s = B e^{AT} \left( x + \int_0^s e^{-Ar} \sigma(z_r) dB_r \right) \\ Z_s = z_s \end{cases} \quad (5.21)$$

Pour le système (5.20), l'itération de type point fixe de l'application  $\Psi$  consiste à considérer les suites de processus  $(X^n, Y^n, Z^n)$  définies par :

$$\begin{cases} (X^0, Y^0, Z^0) = (x, Bx, 0) \\ X_s^{n+1} = x + \int_0^s A X_r^n dr + \int_0^s \sigma(Z_r^n) dB_r \\ Y_s^{n+1} = B X_T^{n+1} - \int_s^T Z_r^{n+1} dB_r. \end{cases} \quad (5.22)$$

La discrétisation devient alors pour  $n$  naturel positif, en considérant  $(\hat{X}^0, \hat{Y}^0, \hat{Z}^0) = (x, Bx, 0)$

$$\begin{cases} \hat{X}_0^{n+1} = x, \\ \hat{X}_{t_{i+1}}^{n+1} = \hat{X}_{t_i}^{n+1} + A(t_{i+1} - t_i) \hat{X}_{t_i}^n + \sigma(\hat{Z}_{t_i}^n)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \\ \hat{Y}_{t_i}^{n+1} = E \left[ \hat{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{Z}_r^{n+1} dB_r, \\ \hat{Y}_T^{n+1} = B \hat{X}_T^{n+1} \end{cases} \quad (5.23)$$

Si la subdivision est prise régulière ( $t_{k+1} - t_k = T/p$ ), on peut sur cet exemple effectuer les calculs de proche en proche et obtenir des relations de récurrence explicites pour le calcul des solutions du système itératif et de la discrétisation. En particulier :

**Proposition 5.10** *On a pour  $n \geq 0$  (avec la convention qu'une somme sur l'ensemble vide est nulle)*

$$\begin{cases} X_s^n = x \sum_{j=0}^n \frac{(As)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^s \frac{(A(s-u))^j}{j!} \sigma(Z_u^{n-1-j}) dB_u \\ Y_s^n = Bx \sum_{j=0}^n \frac{(AT)^j}{j!} + B \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^s \frac{(A(T-u))^j}{j!} \sigma(Z_u^{n-1-j}) dB_u \\ Z_s^n = B \sum_{j=0}^{n-1} \sigma(Z_s^{n-1-j}) \frac{A(T-s)^j}{j!} \end{cases} \quad (5.24)$$

**Démonstration.**

On procède par récurrence sur  $n \geq 0$ .

Avec la convention adoptée sur les sommes indexées sur le vide, le cas  $n = 0$  est trivial.

Pour prouver l'hérédité de la propriété, il suffit de s'assurer que

$$\int_0^s \left( \int_0^r \frac{(r-u)^k}{k!} \sigma(Z_u) dB_u \right) dr = \int_0^s \frac{(s-u)^{k+1}}{(k+1)!} \sigma(Z_u) dB_u$$

c'est à dire que l'on peut intervertir les deux intégrales.

Pour cela, on peut utiliser la formule du binôme de Newton ce qui nous ramène à prouver que

$$\int_0^s \left( \int_0^r u^m r^n \sigma(Z_u) dB_u \right) dr = \int_0^s \left( \int_u^s u^m r^n \sigma(Z_u) dr \right) dB_u$$

Cette égalité s'obtient aisément en utilisant la formule d'Itô au produit  $\frac{r^{n+1}}{n+1} \int_0^r u^m \sigma(Z_u) dB_u$  entre 0 et  $s$ .  $\square$

De même, pour la discrétisation :

**Proposition 5.11** *En considérant pour  $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'entier naturel*

$$C_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.25)$$

*et en convenant qu'une somme indexée sur l'ensemble vide est nulle, on obtient*

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{X}_{t_i}^n &= x \sum_{j=0}^{\min(i,n)} C_i^j \left( \frac{AT}{p} \right)^j + \sum_{j=\max(0,n-i)}^{n-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-j} \left( \sum_{k=0}^{i+j-n} C_{i-k-1}^{n-j-1} \sigma(\hat{Z}_{t_k}^j) (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \right) \\ &= x \sum_{j=0}^{\min(i,n)} C_i^j \left( \frac{AT}{p} \right)^j + \sum_{k=0}^{i-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \left( \sum_{j=\max(n+k-i,0)}^{n-1} C_{i-k-1}^{n-j-1} \sigma(\hat{Z}_{t_k}^j) \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-j} \right) \\ \hat{Y}_{t_i}^n &= B \sum_{j=\max(0,n-p)}^{n-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-j} \left( \sum_{k=0}^{\min(p+j-n,i-1)} C_{p-k-1}^{n-j-1} \sigma(\hat{Z}_{t_k}^j) (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \right) \\ &\quad + Bx \sum_{j=0}^{\min(p,n)} C_p^j \left( \frac{AT}{p} \right)^j \\ \hat{Z}_{t_i}^n &= B \sum_{j=0}^{\min(n-1,p-i-1)} \left( \frac{AT}{p} \right)^j C_{p-i-1}^j \sigma(\hat{Z}_{t_i}^{n-1-j}), \end{aligned} \right. \quad (5.26)$$

*donc en particulier  $\hat{Z}^n$  est déterministe.*

**Démonstration.**

On procède par récurrence sur  $n \geq 0$ , en remarquant que  $\sum_{j=0}^q C_j^p = C_{q+1}^{p+1}$  pour  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ .

Les relations sont vraies pour  $n = 0$  car on somme alors sur l'ensemble vide.

Supposons les relations vraies à l'ordre  $n \geq 0$  fixé.

De  $\hat{X}_{t_i}^{n+1} = x + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{AT}{p} \hat{X}_{t_j}^n + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma(\hat{Z}_{t_j}^n)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ , on déduit que

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t_i}^{n+1} &= x + x \frac{AT}{p} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{\min(n,j)} C_j^k \left( \frac{AT}{p} \right)^k + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma(\hat{Z}_{t_i}^n)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=\max(0,n-j)}^{n-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-k} \sum_{l=0}^{j+k-n} C_{j-l-1}^{n-k-1} \sigma(\hat{Z}_{t_l}^k)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &x + x \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{\min(n,j)} C_j^k \left( \frac{AT}{p} \right)^{k+1} \\ &= x + x \sum_{k=0}^{\min(n,i-1)} \left( \frac{AT}{p} \right)^{k+1} \sum_{j=k}^{i-1} C_j^k \\ &= x + \sum_{k=0}^{\min(n,i-1)} \left( \frac{AT}{p} \right)^{k+1} C_i^{k+1} \\ &= x \sum_{k=0}^{\min(n+1,i)} \left( \frac{AT}{p} \right)^k C_i^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=\max(0,n-j)}^{n-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-k} \sum_{l=0}^{j+k-n} C_{j-l-1}^{n-k-1} \sigma(\hat{Z}_{t_l}^k)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \\ &= \sum_{k=\max(0,n+1-i)}^{n-1} \sum_{l=0}^{i+k-(n+1)} \sum_{j=\max(0,l+n-k)}^{i-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-k} C_{j-l-1}^{n-k-1} \sigma(\hat{Z}_{t_l}^k)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \\ &= \sum_{k=\max(0,n+1-i)}^{n-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-k} \sum_{l=0}^{i+k-(n+1)} \left( \sum_{j=l+n-k}^{i-1} C_{j-l-1}^{n-k-1} \right) \sigma(\hat{Z}_{t_l}^k)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \\ &= \sum_{k=\max(0,n+1-i)}^{n-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-k} \sum_{l=0}^{i+k-(n+1)} C_{i-l-1}^{n-k} \sigma(\hat{Z}_{t_l}^k)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \end{aligned}$$

En rassemblant les 3 termes, on obtient bien

$$\hat{X}_{t_i}^{n+1} = x \sum_{j=0}^{\min(i,n+1)} C_i^j \left( \frac{AT}{p} \right)^j + \sum_{j=\max(0,n+1-i)}^n \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-j} \sum_{k=0}^{i+j-(n+1)} C_{i-k-1}^{n-j} \sigma(\hat{Z}_{t_k}^j)(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$



La dernière expression de  $\hat{X}$  s'obtient en intervertissant l'ordre des deux sommations. On peut alors remarquer que

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t_{i+1}}^{n+1} - \hat{Y}_{t_i}^{n+1} &= B \sum_{j=\max(n+1-p,0)}^n \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-j} 1_{p+j-n-1 \geq i} C_{p-i-1}^{n-j} \sigma(\hat{Z}_{t_i}^j) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &= B \sum_{j=\max(n+1-p+i,0)}^n \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-j} C_{p-i-1}^{n-j} \sigma(\hat{Z}_{t_i}^j) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &= B \sum_{j=0}^{\min(n, p-i-1)} \left( \frac{AT}{p} \right)^j C_{p-i-1}^j \sigma(\hat{Z}_{t_i}^{n-j}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \end{aligned}$$

Les  $(\hat{Z}^j, j \leq n)$  étant déterministes par hypothèse de récurrence, on obtient maintenant aisément l'expression de  $\hat{Z}^{n+1}$ . □

La proposition qui suit donne des majorations dont on verra dans l'étude plus générale de ce schéma de discrétisation, qu'elles permettent de conclure à sa convergence (pour cet exemple).

**Proposition 5.12** *Sous l'hypothèse  $\sigma$  bornée, pour  $p, n \in \mathbb{N}$  et  $i$  compris entre 0 et  $p$ , on a*

$$\begin{aligned} |\hat{Z}_{t_i}^n|^2 &\leq B^2 \|\sigma\|_\infty^2 e^{2AT} \\ E \left[ |\hat{X}_{t_i}^n|^2 \right] &\leq (|x|^2 + \|\sigma\|_\infty^2) e^{2AT} \end{aligned}$$

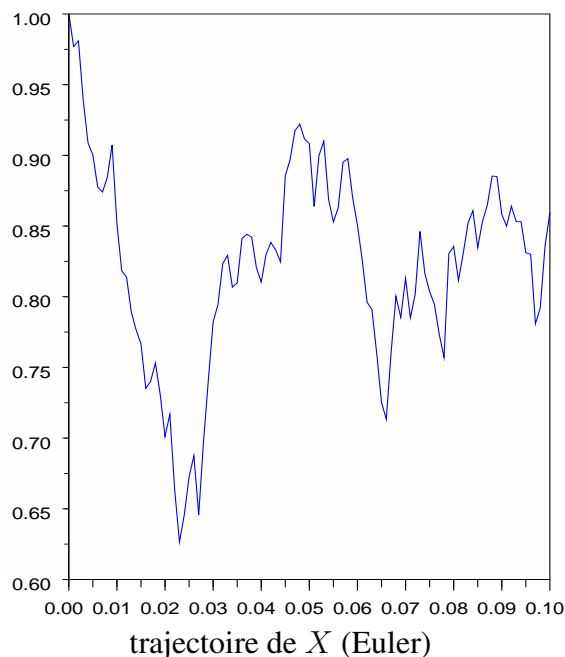
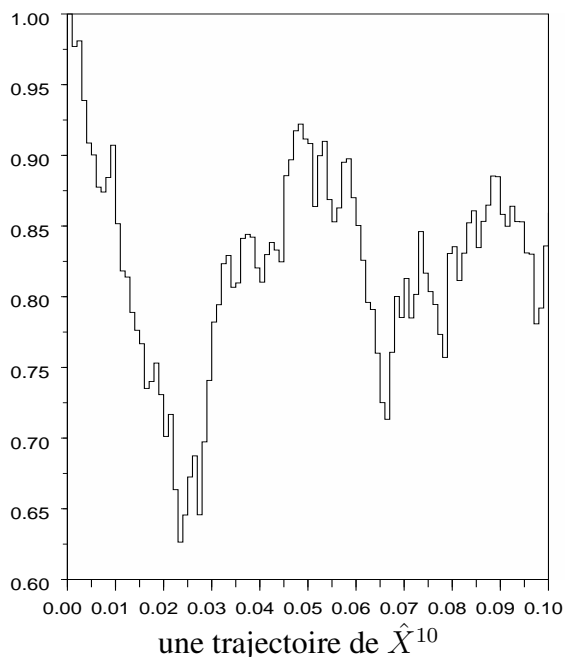
### Démonstration.

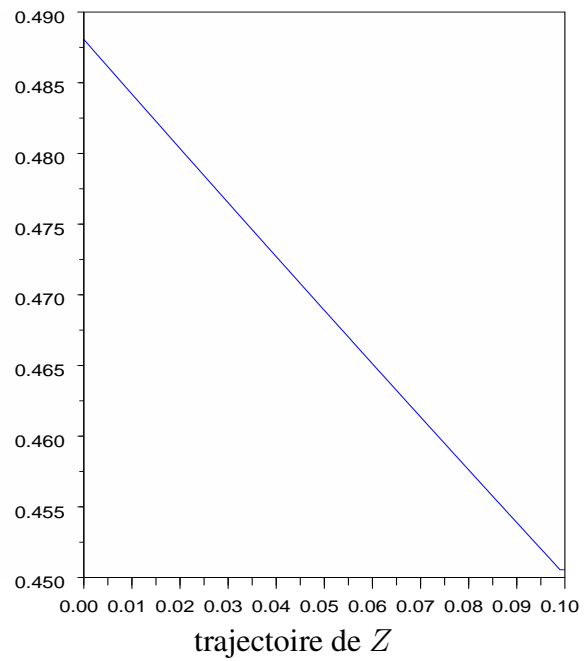
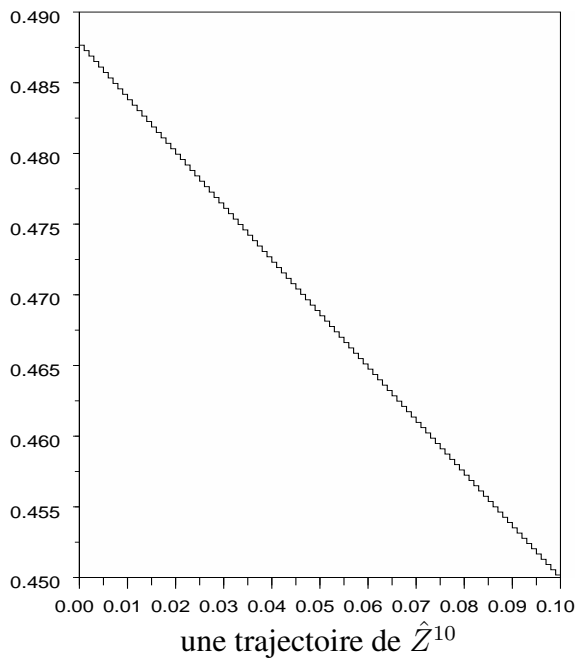
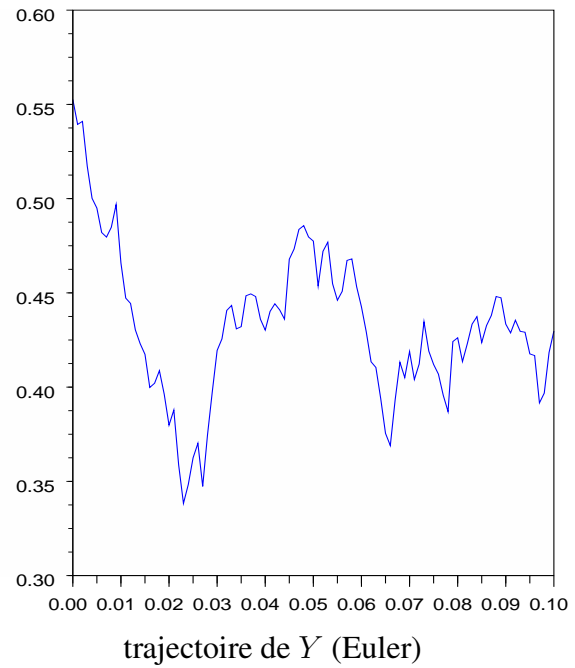
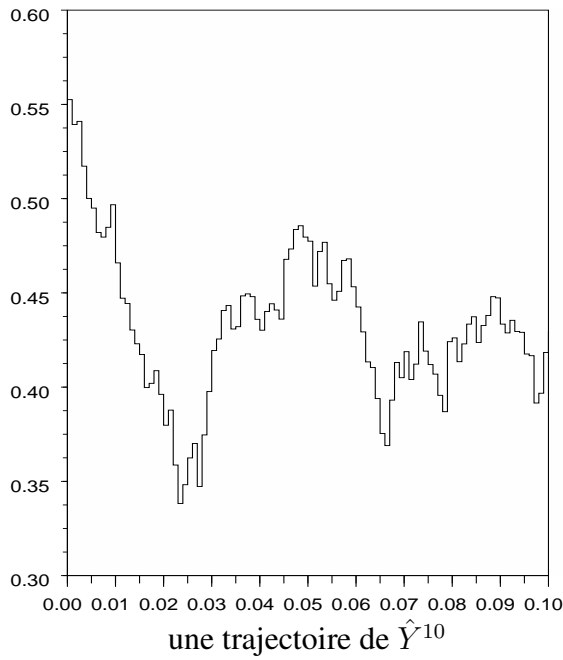
Par la seconde expression de  $\hat{X}_{t_i}^n$ , on déduit aisément que

$$\begin{aligned} E \left[ |\hat{X}_{t_i}^n|^2 \right] &\leq |x|^2 \left( \sum_{j=0}^{\min(i,n)} C_i^j \left( \frac{AT}{p} \right)^j \right)^2 + \frac{AT}{p} \sum_{k=0}^{i-1} \left( \sum_{j=\max(n+k-i,0)}^{n-1} C_{i-k-1}^{n-j-1} \sigma(\hat{Z}_{t_k}^j) \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-j} \right)^2 \\ &\leq |x|^2 \left( 1 + \frac{AT}{p} \right)^{2p} + \frac{AT}{p} \|\sigma\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{i-1} \left( \sum_{j=\max(n+k-i,0)}^{n-1} C_{i-k-1}^{n-j-1} \left( \frac{AT}{p} \right)^{n-1-j} \right)^2 \\ &\leq |x|^2 \left( 1 + \frac{AT}{p} \right)^{2p} + \frac{AT}{p} \|\sigma\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{i-1} \left( 1 + \frac{AT}{p} \right)^{2(i-1-k)} \\ &\leq e^{2AT} (|x|^2 + \|\sigma\|_\infty^2) \end{aligned}$$

L'inégalité concernant  $\hat{Z}_{t_i}^n$  se fait de la même manière. □

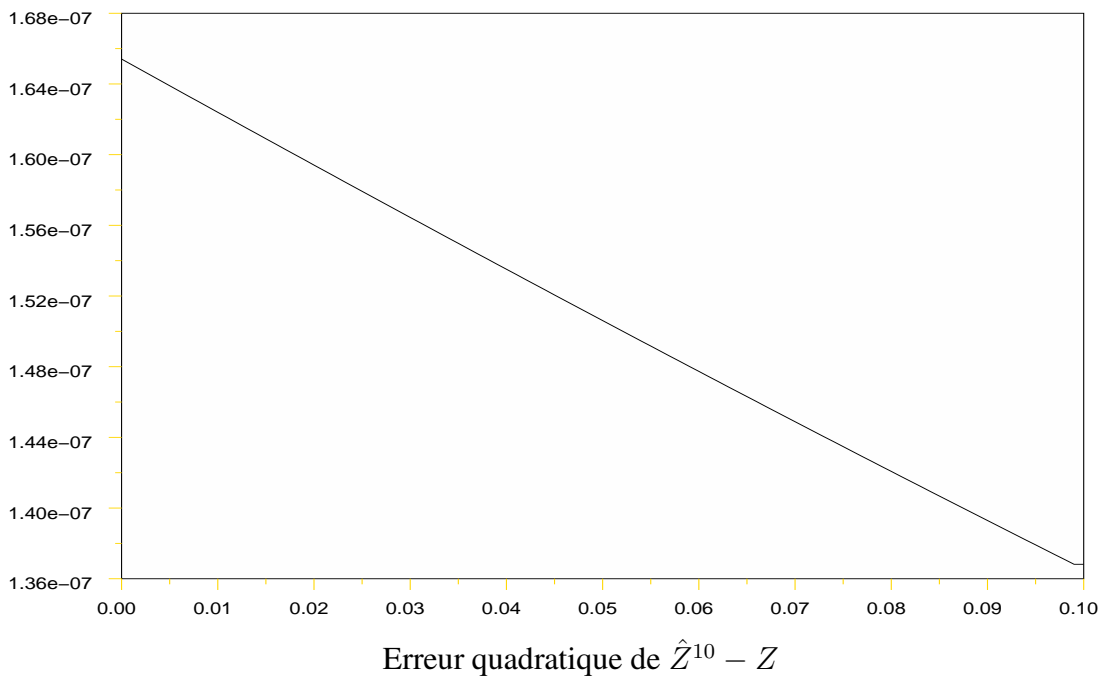
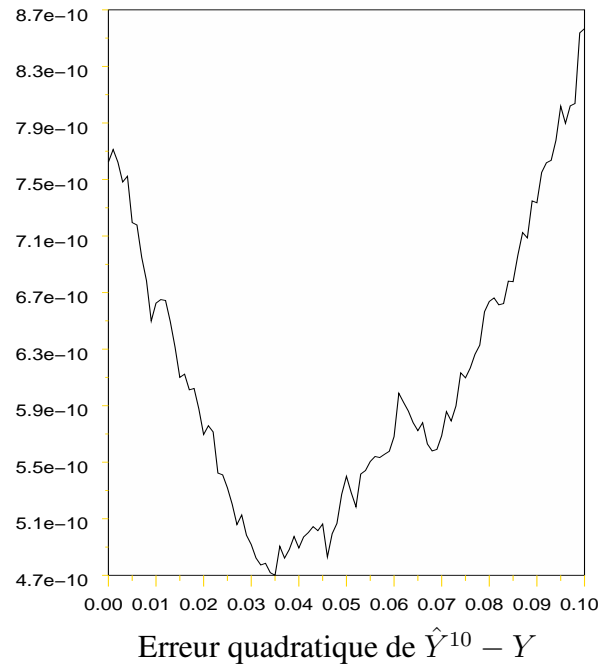
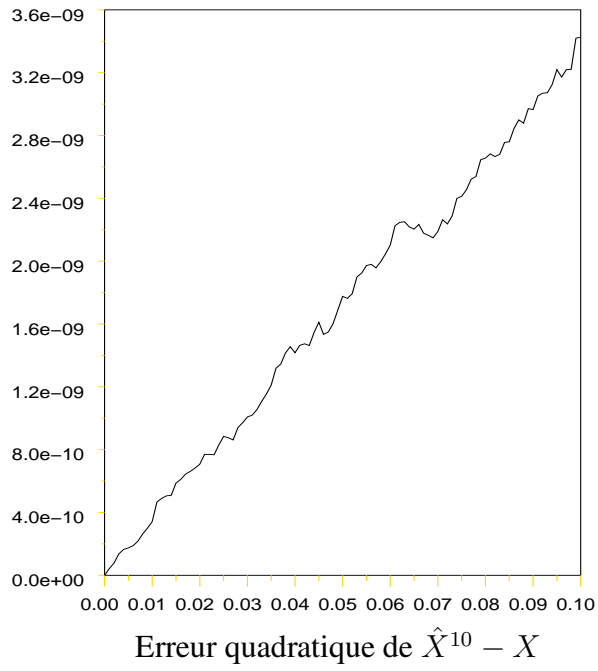
Dans le cadre de cet exemple et avec les formules de la proposition 5.11, il est facile d'illustrer la convergence de la discrétisation. Les figures qui suivent, comparent les graphes des discrétisations  $\hat{X}^n$ ,  $\hat{Y}^n$ ,  $\hat{Z}^n$  avec celles du schéma d'Euler associé à la solution attendue et pour la même trajectoire brownienne. On a pris  $n = 10$  et  $p = 100$ . On se place également sous des hypothèses permettant d'appliquer le théorème d'existence et d'unicité 3.13 par exemple ici  $T = 0.1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0.5$ ,  $x = 1$ ,  $\sigma = \cos$ .

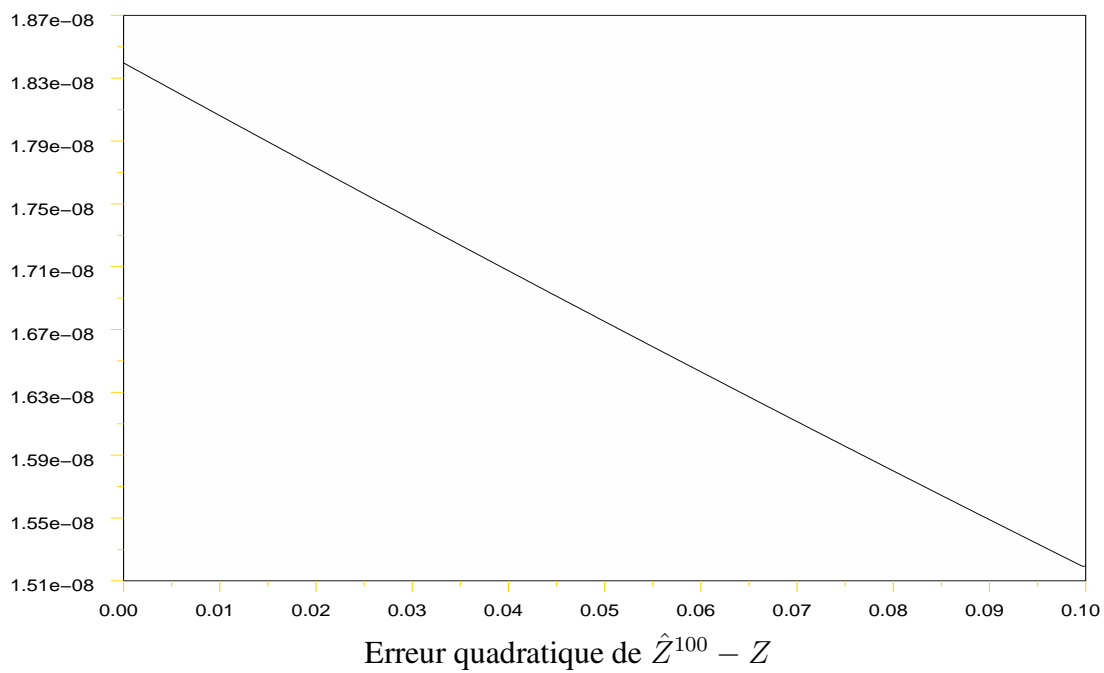
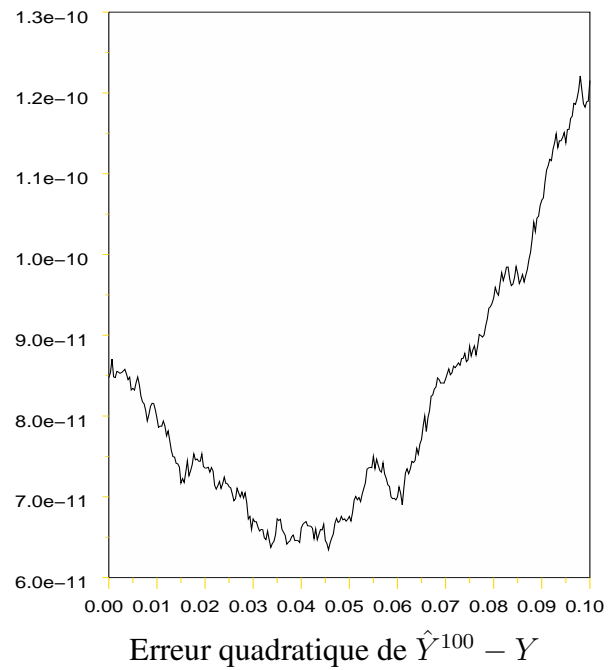
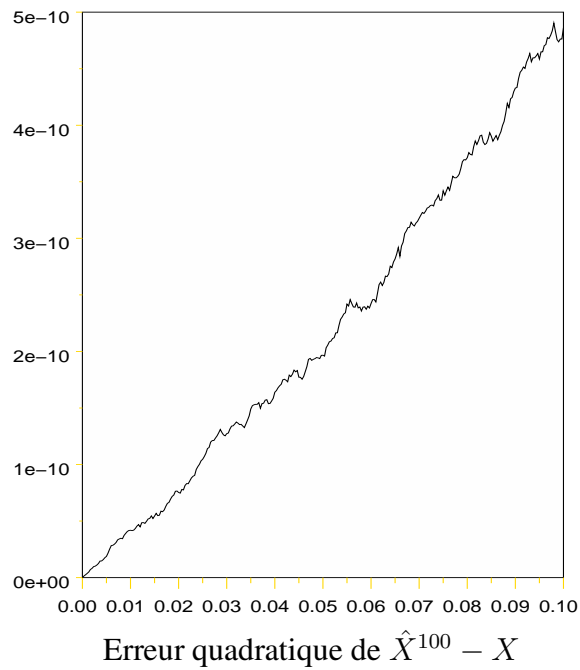




A l'examen de ces graphes, la convergence sur cet exemple semble visible sur le graphe d'une seule trajectoire. Toutefois, les graphes qui suivent sont beaucoup plus représentatives de cette

convergence. Nous avons tracé ce que nous désignerons par les erreurs quadratiques entre  $\hat{X}_{10}$  et  $X$ ,  $\hat{Y}_{10}$  et  $Y$  d'une part, entre  $\hat{X}^{100}$  et  $X$ ,  $\hat{Y}^{100}$  et  $Y$  d'autre part. On rappelle que l'on simule  $X$  et  $Y$  par un schéma d'Euler classique utilisant les mêmes trajectoires browniennes. Signalons pour finir que nous avons tracé  $E \left[ \left( \hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i} \right)^2 \right]$ ,  $E \left[ \left( \hat{Y}_{t_i}^n - Y_{t_i} \right)^2 \right]$  pour  $n = 10$  et  $n = 100$  par une méthode de Monte Carlo en prenant 100 trajectoires.





Nous n'avons certes pas encore démontré la convergence de la discrétisation pour cet exemple simple. Nous allons passer à une étude générale de cette discrétisation, et serons alors à même de

prouver sa convergence dans le cas particulier précédent.

Comme mentionné précédemment, l'étude générale consiste à évaluer les quantités

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|\tilde{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\|$$

et

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \tilde{\Theta}^k\|$$

## 5.5 Evaluation de $\sup \{ \|\tilde{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\| \mid k \in \{0, \dots, n\} \}$

On considérera, pour  $\alpha > 0$ , l'hypothèse

$$(H_\alpha) : \exists K > 0, \forall x, y, z, r, r', \begin{cases} |f(r, x, y, z) - f(r', x, y, z)| \leq K|r - r'|^\alpha \\ |g(r, x, y, z) - g(r', x, y, z)| \leq K|r - r'|^\alpha \\ |\sigma(r, x, y, z) - \sigma(r', x, y, z)| \leq K|r - r'|^\alpha. \end{cases}$$

On supposera dans la suite qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que l'hypothèse  $(H_\alpha)$  soit vérifiée.

Sur  $[t_i, t_{i+1}[$ , pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a, en utilisant les formules (5.8) et (5.9)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_s^{k+1} - \bar{X}_s^{k+1} &= \tilde{X}_{t_i}^{k+1} - \bar{X}_{t_i}^{k+1} + \int_{t_i}^s (f(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - f(r, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k)) dr \\ &\quad + \int_{t_i}^s (\sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - \sigma(r, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k)) dB_r. \end{aligned}$$

Donc, en posant

$$\begin{cases} \varepsilon_s^{k+1} = \tilde{X}_s^{k+1} - \bar{X}_s^{k+1}, \\ \Delta f_r^i = f(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - f(r, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k), \\ \Delta g_r^i = g(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - g(r, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k), \\ \Delta \sigma_r^i = \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - \sigma(r, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k), \end{cases}$$

on a, sur  $[t_i, t_{i+1}[$ ,

$$\varepsilon_s^{k+1} = \varepsilon_{t_i}^{k+1} + \int_{t_i}^s \Delta f_r^i dr + \int_{t_i}^s \Delta \sigma_r^i dB_r.$$

Comme  $\varepsilon_t^{k+1} = 0$ , on a donc, pour  $s \in [t, T]$ ,

$$\varepsilon_s^{k+1} = \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} \Delta f_r^i \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}} dr + \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} \Delta \sigma_r^i \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}} dB_r$$

et donc

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} |\varepsilon_s^{k+1}|^2 \right] \leq 2E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left( \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} \Delta f_r^i \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}]}(r) dr \right)^2 \right] \\ + 2E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left( \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} \Delta \sigma_r^i \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}]}(r) dr \right)^2 \right].$$

Or, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, puis l'hypothèse  $(H_\alpha)$ , on obtient

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left( \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} \Delta f_r^i \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}} dr \right)^2 \right] \\ \leq E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left( (s-t) \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} (\Delta f_r^i)^2 \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}} dr \right) \right] \\ \leq B^2 T E \left[ \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (r-t_i)^{2\alpha} dr \right] \\ \leq \frac{B^2 T}{2\alpha+1} \sum_{i=0}^{p-1} (t_{i+1} - t_i)^{2\alpha+1} \\ \leq \frac{B^2 T}{2\alpha+1} |\pi|^{2\alpha} \sum_{i=0}^{p-1} (t_{i+1} - t_i) \\ \leq \frac{B^2 T^2}{2\alpha+1} |\pi|^{2\alpha}.$$



De plus, en notant  $H_r = \sum_{i=0}^{p-1} \Delta\sigma_i^r \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}}$ , on a

$$\begin{aligned}
E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left( \int_t^s \sum_{i=0}^{p-1} \Delta\sigma_i^r \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}} dB_r \right)^2 \right] &= E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} \left( \int_t^s H_r dB_r \right)^2 \right] \\
&\leq 4E \left[ \int_t^T H_r^2 dr \right] \\
&= 4E \left[ \int_t^T \sum_{i=0}^{p-1} (\Delta\sigma_i^r)^2 \cdot 1_{t_i \leq r \leq t_{i+1}} dr \right] \\
&\leq 4B^2 \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (r - t_i)^{2\alpha} dr \\
&\leq \frac{4B^2}{2\alpha + 1} \sum_{i=0}^{p-1} (t_{i+1} - t_i)^{2\alpha+1} \\
&\leq \frac{4B^2 T}{2\alpha + 1} |\pi|^{2\alpha}
\end{aligned}$$

où la première inégalité provient de l'inégalité de Doob appliquée à la martingale continue

$$M_s = \int_t^s H_r dB_r.$$

On en déduit donc que

$$E \left( \sup_{t \leq s \leq T} |\tilde{X}_s^{k+1} - \bar{X}_s^{k+1}|^2 \right) \leq \frac{2B^2 T(T+4)}{2\alpha + 1} |\pi|^{2\alpha}.$$

On a de plus

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1} &= \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) - \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) \\
&\quad + \int_s^T \sum_{i=0}^{p-1} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(r) \left( g(r, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - g(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) \right) dr \\
&\quad + \int_s^T (\tilde{Z}_r^{k+1} - \bar{Z}_r^{k+1}) dB_r \\
&= \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) - \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) - \int_s^T \sum_{i=0}^{p-1} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(r) \Delta g_r^i dr + \int_s^T (\tilde{Z}_r^{k+1} - \bar{Z}_r^{k+1}) dB_r.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de mesurabilité, on obtient

$$\bar{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1} = E \left[ \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) - \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) \middle| \mathcal{F}_s \right] - E \left[ \int_s^T \sum_{i=0}^{p-1} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(r) \Delta g_r^i dr \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} (\bar{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1})^2 \right] &\leq 2E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} E \left[ \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) - \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 \right] \\ &\quad + 2E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} E \left[ \int_s^T \sum_{t_{i+1} > s} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(r) \Delta g_r^i dr \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

Toujours en appliquant l'inégalité de Doob à la martingale continue  $E \left[ \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) - \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) \middle| \mathcal{F}_s \right]$ , on obtient (rappelons que  $k_\Phi$  désigne la constante de lipschitz de l'application  $\Phi$ )

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} E \left[ \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) - \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 \right] &\leq 4k_\Phi^2 E \left[ (\bar{X}_T^{k+1} - \tilde{X}_T^{k+1})^2 \right] \\ &\leq \frac{8B^2T(T+4)k_\Phi^2}{2\alpha+1} |\pi|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Pour le second terme, notons  $\phi_r = \sum_{i=0}^{p-1} \Delta g_r^i \cdot 1_{[t_i, t_{i+1}[}(r)$ . On a, par l'inégalité de Jensen, puis par les propriétés classiques de l'espérance conditionnelle,

$$\begin{aligned} E \left[ \int_s^T \phi_r dr \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 &\leq E \left[ \left( \int_s^T \phi_r dr \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &\leq E \left[ \left( \int_s^T |\phi_r| dr \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &\leq E \left[ \left( \int_t^T |\phi_r| dr \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Doob, on obtient

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} E \left[ \int_s^T \phi_r dr \middle| \mathcal{F}_s \right]^2 \right] &\leq E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} E \left[ \left( \int_t^T |\phi_r| dr \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &\leq 4E \left[ \left( \int_t^T |\phi_r| dr \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left( \int_t^T |\phi_r| dr \right)^2 &= \left( \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\Delta g_r^i| dr \right)^2 \\ &\leq \left( B \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (r - t_i)^\alpha dr \right)^2 \\ &\leq \frac{B^2}{(\alpha+1)^2} \left[ \sum_{i=0}^{p-1} (t_{i+1} - t_i)^{\alpha+1} \right]^2 \\ &\leq \frac{B^2 T^2}{(\alpha+1)^2} |\pi|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} (\bar{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1})^2 \right] \leq \left( \frac{16B^2T(T+4)k_\phi^2}{2\alpha+1} + \frac{8B^2T^2}{(\alpha+1)^2} \right) |\pi|^{2\alpha}.$$

Pour finir, on vérifie que

$$\begin{aligned} E \left[ \int_t^T (\bar{Z}_r^{k+1} - \tilde{Z}_r^{k+1})^2 dr \right] &= E \left[ \left( \int_t^T (\bar{Z}_r^{k+1} - \tilde{Z}_r^{k+1}) dB_r \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \left( (\bar{Y}_t^{k+1} - \tilde{Y}_t^{k+1}) - (\bar{Y}_T^{k+1} - \tilde{Y}_T^{k+1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_t^T \sum_{i=0}^{p-1} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(r) \Delta g_r^i dr \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\bar{Y}_t^{k+1} - \tilde{Y}_t^{k+1} = E \left[ \bar{Y}_T^{k+1} - \tilde{Y}_T^{k+1} - \int_t^T \phi_r dr \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Si on note  $\chi = \bar{Y}_T^{k+1} - \tilde{Y}_T^{k+1} - \int_t^T \phi_r dr$ , on a donc

$$\begin{aligned} E \left[ \int_t^T (\bar{Z}_r^{k+1} - \tilde{Z}_r^{k+1})^2 dr \right] &\leq E \left[ \left( \chi - E[\chi | \mathcal{F}_t] \right)^2 \right] \\ &\leq E[\chi^2] \\ &\leq 2E \left[ \left( \bar{Y}_T^{k+1} - \tilde{Y}_T^{k+1} \right)^2 \right] + 2E \left[ \left( \int_t^T \phi_r dr \right)^2 \right] \\ &\leq 2E \left[ \left( \Phi(\tilde{X}_T^{k+1}) - \Phi(\bar{X}_T^{k+1}) \right)^2 \right] + 2E \left[ \left( \int_t^T \phi_r dr \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{4B^2T(T+4)k_\phi^2}{2\alpha+1} |\pi|^{2\alpha} + \frac{2B^2T^2}{(\alpha+1)^2} |\pi|^{2\alpha} \\ &\leq \left( \frac{4B^2T(T+4)k_\phi^2}{2\alpha+1} + \frac{2B^2T^2}{(\alpha+1)^2} \right) |\pi|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit donc,  $\|\cdot\|$  désignant la norme rendant l'application  $\Theta$  contractante de rapport de contraction  $\rho$ , que

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|\tilde{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\|^2 \leq C(T, k_\phi, \alpha) |\pi|^{2\alpha}.$$

Ainsi, si en particulier les coefficients  $f, g$  et  $\sigma$  sont hölderiennes d'ordre  $1/2$ , c'est à dire si  $H_{1/2}$  est vérifiée, on obtient que

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|\tilde{\Theta}^k - \bar{\Theta}^k\|^2 \leq C(T, k_\phi) |\pi|.$$

Cette erreur que l'on pourrait qualifier d'erreur d'interpolation n'a pas posé de difficultés majeures. En effet, il semble que la convergence de la discrétisation se joue plutôt dans l'erreur

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \tilde{\Theta}^k\|.$$

En effet, nous verrons que pour contrôler cette erreur, il nous faut contrôler les processus  $\tilde{Z}^n$  et plus particulièrement les quantités

$$\mathcal{E}_1(\pi, n) = \sup_i E \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tilde{Z}_r^n)^2 dr \right]$$

et

$$\mathcal{E}_2(\pi, n) = \sum_i E \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\tilde{Z}_s^n - \tilde{Z}_{t_i}^n|^2 ds \right].$$

Malheureusement, à l'heure actuelle nous n'en avons pas de majorations suffisamment fines à l'exception de cas biens particuliers comme l'exemple de la section 5.4.

## 5.6 *Evaluation de* $\sup \{ \|\hat{\Theta}^k - \tilde{\Theta}^k\| \mid k \in \{0, \dots, n\} \}$

Sur  $[t_i, t_{i+1}[$ , en utilisant les formules (5.10) et (5.9), on a

$$\tilde{X}_s^{k+1} - \hat{X}_s^{k+1} = (s - t_i)f(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) + \sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k)(B_s - B_{t_i})$$

donc si l'on suppose que les coefficients  $\sigma$  et  $f$  sont bornées

$$\begin{aligned} E \left( \sup_{t_i \leq s \leq t_{i+1}} (\hat{X}_s^{k+1} - \tilde{X}_s^{k+1})^2 \right) &\leq 2(t_{i+1} - t_i)^2 E(f(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k)^2) + \\ &\quad 2E[\sigma(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k)^2 (B_s - B_{t_i})^2] \\ &\leq 2|\pi|^2 \|f\|_\infty^2 + 2|\pi| \|\sigma\|_\infty^2 \end{aligned}$$

et donc

$$E \left( \sup_{t \leq s \leq T} (\hat{X}_s^{k+1} - \tilde{X}_s^{k+1})^2 \right) \leq C(f, \sigma) |\pi|.$$

De même sur  $[t_i, t_{i+1}[$ ,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1} &= \tilde{Y}_{t_i}^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1} \\ &= (s - t_i)g(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k) - \int_{t_i}^s \tilde{Z}_r^{k+1} dB_r. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{t_i \leq s \leq t_{i+1}} (\hat{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1})^2 \right] &\leq 2(t_{i+1} - t_i)^2 E[g(t_i, \hat{X}_{t_i}^k, \hat{Y}_{t_i}^k, \hat{Z}_{t_i}^k)^2] + 2E \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\tilde{Z}_r^{k+1})^2 dr \right] \\ &\leq 2|\pi|^2 \|g\|_\infty^2 + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} E \left[ (\tilde{Z}_r^{k+1})^2 \right] dr \\ &\leq 2|\pi|^2 \|g\|_\infty^2 + 2\mathcal{E}_1(\pi, k+1). \end{aligned}$$

Donc

$$E \left[ \sup_{t \leq s \leq T} (\hat{Y}_s^{k+1} - \tilde{Y}_s^{k+1})^2 \right] \leq C(g)|\pi|^2 + 2\mathcal{E}_1(\pi, k+1).$$

En remarquant que  $E \left[ \int_t^T |\hat{Z}_s^{k+1} - \tilde{Z}_s^{k+1}|^2 ds \right] = \mathcal{E}_2(\pi, k)$ , on obtient finalement

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|\hat{\Theta}^k - \tilde{\Theta}^k\|^2 \leq C(f, g, \sigma, \Phi) \left( |\pi| + \sup_{1 \leq k \leq n+1} \mathcal{E}_1(\pi, k) + \sup_{1 \leq k \leq n+1} \mathcal{E}_2(\pi, k) \right).$$

## 5.7 Conclusion

Les calculs précédents nous permettent d'écrire la proposition suivante

**Proposition 5.13** *Sous les hypothèses  $f, g, \sigma$  bornées, lipschitziennes en espace et  $(H_{\frac{1}{2}})$ , pour tout  $N$ , on a*

$$\begin{aligned} \|\hat{\Theta}^N - \Theta\|^2 &\leq 2(\|\hat{\Theta}^N - \Theta^N\|^2 + \|\Theta^N - \Theta\|^2) \\ &\leq \frac{C(f, \sigma, g, \Phi)}{(1-\rho)^2} \left( |\pi| + \sup_{1 \leq k \leq N+1} \mathcal{E}_1(\pi, k) + \sup_{1 \leq k \leq N+1} \mathcal{E}_2(\pi, k) \right) \\ &\quad + 2 \frac{\rho^{2N}}{(1-\rho)^2} \|\Theta^1 - \Theta^0\|^2 \end{aligned}$$

En particulier, si à  $n$  fixé,

$$(*) \begin{cases} \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \mathcal{E}_1(\pi, n) = 0 \\ \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \mathcal{E}_2(\pi, n) = 0 \end{cases}$$

alors le schéma de discrétisation converge.

**Proposition 5.14** *Dans l'exemple particulier de la section 5.4, le schéma de discrétisation converge et on a*

$$\|\hat{\Theta}^N - \Theta\|^2 \leq 2\|\hat{\Theta}^N - \Theta^N\|^2 + 2\|\Theta^N - \Theta\|^2 \quad (5.27)$$

$$\leq \frac{C(f, \sigma, g, \Phi)}{(1-\rho)^2} |\pi| + 2 \frac{\rho^{2N}}{(1-\rho)^2} \|\Theta^1 - \Theta^0\|^2 \quad (5.28)$$

**Démonstration.**

Dans cet exemple, on voit que pour tout  $k$ ,  $\mathcal{E}_2(\pi, k) = 0$  et  $\mathcal{E}_1(\pi, k) \leq \|\sigma\|_\infty e^{2AT} |\pi|$ .

De plus, même si le coefficient  $f$  n'est pas borné, de la proposition 5.12, on déduit le même type de conclusion pour  $\sup_{0 \leq s \leq T} |\hat{X}_s^{k+1} - \tilde{X}_s^{k+1}|^2$ .

□

Ainsi, pour un système d'équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades vérifiant les hypothèses de la proposition 5.13 et (\*), si l'on veut approcher  $\Theta$  à  $\varepsilon$  près en utilisant notre discrétisation, il faudra effectuer  $N$  itérations où  $N$  est tel que  $\frac{\rho^N}{1-\rho} \leq \varepsilon$ . La discrétisation que l'on effectuera à chaque étape d'itération ne s'éloignera pas trop de l'erreur  $\varepsilon$  admise, si on choisit le pas de discrétisation suffisamment petit.

Malheureusement, comme le montre à la fois l'étude générale et les formules de discrétisation, certains obstacles se dressent à l'efficacité de cette discrétisation.

Premièrement, à l'heure actuelle nous ne contrôlons pas suffisamment bien la suite de processus  $(\tilde{Z}^n)$  et par conséquent nous peinons à trouver des hypothèses satisfaisantes et susceptibles à la condition (\*) d'être vérifiée. Une première idée testée, fut d'utiliser les formules récurrentes obtenues dans la section 5.3 afin de dégager de bonnes propriétés. Cette tentative s'est avérée délicate à mener et n'a malheureusement pas aboutie. Une seconde idée serait en remarquant que  $\tilde{Z}^n$  est solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde aléatoire, d'adapter les résultats obtenus par Zhang dans le cadre déterministe [43] sur les quantités équivalentes à  $\mathcal{E}_1(\pi, n)$  et  $\mathcal{E}_2(\pi, n)$ . Cela s'avère fort délicat, les démonstrations de Zhang s'appuyant fortement sur du calcul de Malliavin et des propriétés qui semblent propres au cadre déterministe des coefficients.

Deuxièmement cette discrétisation paraît difficilement utilisable numériquement, les formules révélant une forte récursivité. Un algorithme qui effectue les calculs de manière directe serait contraint de calculer des intégrales multiples de dimension égale au nombre de pas de discrétisation.

Si nous considérons l'équation de Burgers sur  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ u(T, x) &= \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Par la factorisation Cole-Hopf (voir [40] ou [42] pour les détails), on obtient l'expression explicite de la solution

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = \frac{E[\Phi(x + \varepsilon\sqrt{T-t}N)\chi(x + \varepsilon\sqrt{T-t}N)]}{E[\chi(x + \varepsilon\sqrt{T-t}N)]}$$

où  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $\chi(y) = \exp\left(-\varepsilon^2 \int_0^y \Phi(u) du\right)$ .

Nous affichons dans le tableau suivant, différentes valeurs obtenues pour  $u(0, 0)$  (valeur mupad 0.9829265065) par le schéma de discrétisation pour  $T = 0.1$  et  $\varepsilon = 0.5$ .

$P/N$	1	2	3
2	0.9826442302	0.9828738227	0.9828699117
3	0.9826442311	0.9828937304	0.9828889371
4	0.9826442315	0.9829036659	0.9828984006

TAB. 5.1 –  $\hat{Y}_0^N$  suivant quelques valeurs de  $P$  et de  $N$  pour l'équation de Burgers

Nous pouvons faire de même sur l'équation déterministe KPZ (pour Kardar, Parisi et Zhang) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\nu}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)u(t, x) &= 0 \quad (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) &= \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$\nu$  et  $\sigma$  étant des réels strictement positifs.

Elle admet également une solution explicite donnée par (voir Kardar, Parisi and Zhang [23] et Woyczynski [42] pour les détails)

$$u(t, x) = \frac{\log(E[\exp(\nu\Phi(x + \sigma\sqrt{T-t}N))])}{\nu}$$

En testant comme précédemment  $u(0, 0)$  (valeur mupad 0.9877277819), on obtient pour  $T = 0.1$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\nu = 1$ ,

$P/N$	1	2	3
2	0.9875780068	0.9876539701	0.9876535084
3	0.9875780076	0.9876792594	0.9876784430
4	0.9875780080	0.9876918979	0.9876908668

TAB. 5.2 –  $\hat{Y}_0^N$  suivant quelques valeurs de  $P$  et de  $N$  pour l'équation KPZ

En général, on contourne cette difficulté en stockant les fonctions à intégrer sur une discrétisation de leur ensemble de définition. Cependant, ici l'ensemble de définition grossit exponentiellement avec le nombre d'itération  $n$  utilisé et demanderait donc une mémoire de stockage considérable. Une piste intéressante pour diminuer le nombre d'itérations nécessaires serait d'utiliser la décroissance du rayon spectral définissant le rapport de contraction lorsque l'intervalle de temps tend vers 0, en découpant l'intervalle de temps initial en une multitude de petits intervalles. Dans le cadre de la "waveform relaxation", on parle de méthode de windowing. Il sera nécessaire toutefois que le gain obtenu sur le rayon spectral compense la multiplication des calculs engendrés par le découpage.

Signalons tout de même un point positif à ce schéma de discrétisation. Même si nous n'avons pas abordé le problème jusqu'à présent, il nous est impossible de calculer les espérances du schéma de manière exacte. Chaque calcul d'espérance apporte un terme d'erreur qu'il faut faire apparaître dans le calcul de l'erreur globale. Ici en utilisant la formulation en termes d'opérateur, une technique de calcul d'espérance (une méthode de Monte-Carlo, la méthode des rectangles ou plus généralement l'approximation par les splines, la quantification introduite par Bally [3] et reprise par Delarue et Menozzi [9]) peut-être représentée par un opérateur de calcul  $\Delta_c$ , et la suite de processus qui nous intéressera alors sera  $\hat{\Theta}^{n+1} = (\Delta_c \circ \Delta_\pi \circ \Psi)(\hat{\Theta}^n)$  et la formule (5.12), nous permet de dire que la quantité à réévaluer est alors  $\sup_{0 \leq k \leq n} \|(\Delta_c \circ \Delta_\pi - Id)(\bar{\Theta}^k)\|$ .

Tout se passe donc comme si on avait pris un opérateur de discrétisation différent. En fait, il faudra rajouter à l'erreur trouvée dans l'inégalité de la proposition 5.13, une erreur de calcul

$$\frac{1}{1 - \rho} \cdot \sup_{0 \leq k \leq n} \|(\Delta_c \circ \Delta_\pi - \Delta_\pi)(\bar{\Theta}^k)\|$$

propre à chaque opérateur  $\Delta_c$ .

Nous reprenons les équations précédentes de Burgers et KPZ, mais cette fois ci, nous utilisons une méthode de “grille” de pas 0.001 et les techniques de quantification de Bally et Pagès pour simuler les espérances (nous rappelons que la quantification consiste à approcher une loi continue par une loi discrète). Nous ne pouvons comme précédemment mentionné avec un tel pas que stocker une seule itération de l'algorithme. Les tableaux qui suivent donnent donc les valeurs de  $\hat{Y}_0^1$  pour  $P = 10, 50, 100$  et  $200$ , toujours pour les mêmes paramètres.

$P$	10	50	100	200
$\hat{Y}_0^1$	0.9822016736	0.9799315739	0.9765590250	0.9679682405

TAB. 5.3 –  $\hat{Y}_0^1$  suivant quelques valeurs de  $P$  pour l'équation de Burgers ( $\epsilon = 0.5, T = 0.1$ )

$P$	10	50	100	200
$\hat{Y}_0^1$	0.9875791290	0.9872791451	0.9863651008	0.9826984401

TAB. 5.4 –  $\hat{Y}_0^1$  suivant quelques valeurs de  $P$  pour l'équation KPZ ( $\nu = 1, \sigma = 0.5, T = 0.1$ )

On peut en se limitant à la fois sur  $P$  et sur la discrétisation en espace de la méthode de grille (0.01 dans le cas des simulations qui vont suivre) procéder à une seconde itération. Le tableau suivant donne les résultats obtenus.



$P$	10	15	20
$\hat{Y}_0^2$	0.9771924082	0.9733990940	0.9688318804

TAB. 5.5 –  $\hat{Y}_0^2$  suivant quelques valeurs de  $P$  pour l'équation de Burgers ( $\epsilon = 0.5, T = 0.1$ )

$P$	10	15	20
$\hat{Y}_0^2$	0.9865561812	0.9851158238	0.9833150241

TAB. 5.6 –  $\hat{Y}_0^2$  suivant quelques valeurs de  $P$  pour l'équation KPZ ( $\nu = 1, \sigma = 0.5, T = 0.1$ )

# Bibliographie

- [1] R. ABRAHAM AND O. RIVIÈRE. Forward-backward stochastic differential equations and pde with gradient dependent second order coefficients. *ESAIM : Probab. Stat.*. To appear.
- [2] F. ANTONELLI. Backward-forward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, 3(3): 777–793, 1993.
- [3] V. BALLY. Approximation scheme for solutions of BSDE. *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 177–191. Longman, Harlow, 1997.
- [4] V. BALLY AND G. PAGÈS. A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9(6): 1003–1049, 2003.
- [5] J. M. BISMUT. Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. *Mem. Amer. Math. Soc.* 176, Providence, Rhode Island, 1973.
- [6] B. BOUCHARD AND N. TOUZI. Discrete-time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 111(2): 175–206, 2004.
- [7] D. CHEVANCE. Numerical methods for backward stochastic differential equations. *Numerical methods in finance*, Publ. Newton Inst., pages 232–244. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [8] M.G. CRANDALL, H. ISHII, AND P.L LIONS. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1): 1–67, 1992.
- [9] F. DELARUE AND S. MENOZZI. A forward backward stochastic algorithm for quasi-linear pdes. *Annals of Applied Probability*. To appear.
- [10] F. DELARUE. On the existence and uniqueness of solutions to FBSDEs in a non-degenerate case. *Stochastic Process. Appl.*, 99(2): 209–286, 2002.
- [11] J. DOUGLAS JR., J. MA, AND P. PROTTER. Numerical methods for forward-backward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, 6(3): 940–968, 1996.
- [12] R. DURRETT. *Brownian motion and martingales in analysis*. Wadsworth Mathematics Series. Wadsworth advanced book and software, 1984.
- [13] E. B. DYNKIN. Superprocesses and partial differential equations. *Ann. Probab.*, 21(3): 1185–1262, 1993.

- [14] E. B. DYNKIN AND S. E. KUZNETSOV. Fine topology and fine trace on the boundary associated with a class of semilinear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51(8): 897–936, 1998.
- [15] N. EL KAROUI AND L. MAZLIAK, EDITORS. *Backward stochastic differential equations*, volume 364 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1997. Papers from the study group held at the University of Paris VI, Paris, 1995–1996.
- [16] A. E. RUEHLI, E. LELARASMEE, AND A. L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI. The waveform relaxation method for the time-domain analysis of large scale integrated circuits. *IEEE Trans. Computer-aided Design CAD-1*, pages 131–145, 1982.
- [17] A. FRIEDMAN. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [18] E. GOBET, J. P. LEMOR AND X. WARIN. A regression-based Monte Carlo method to solve backward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3): 2172–2202, 2005.
- [19] C. GRAHAM, TH. G. KURTZ, S. MÉLÉARD, PH. E. PROTTER, M. PULVIRENTI, AND D. TALAY. *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations*, volume 1627 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Lectures given at the 1st Session and Summer School held in Montecatini Terme, May 22–30, 1995, Edited by Talay and L. Tubaro, Fondazione C.I.M.E.
- [20] F. HIRSCH AND G. LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Enseignement des Mathématiques. Masson, Paris, 1997. Cours et exercices.
- [21] H. ISHII AND S. KOIKE. Viscosity solutions for monotone systems of second-order elliptic PDEs. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(6-7): 1095–1128, 1991.
- [22] I. KARATZAS AND S. E. SHREVE. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [23] M. KARDAR, G. PARISI, AND Y. C. ZHANG. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56: 889–892, 1986.
- [24] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, AND N. N. URAL'CEVA. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [25] B. LAPEYRE, E. PARDOUX, AND R. SENTIS. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, volume 29 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, 1998.
- [26] J. F. LE GALL. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [27] J. MA AND J. YONG. Forward-backward stochastic differential equations and their applications. *Lecture Notes Math.*, volume 1702. Springer, Berlin, 1999.
- [28] J. MA, PH. PROTTER, AND J. M. YONG. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme. *Probab. Theory Related Fields*, 98(3): 339–359, 1994.
- [29] J. MA AND J. ZHANG. Representation theorems for backward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, 12(4): 1390–1418, 2002.

- [30] H. P. MCKEAN, JR. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56: 1907–1911, 1966.
- [31] S. MÉLÉARD. Probabilistic interpretation and approximations of some Boltzmann equations. *Stochastic models (Spanish) (Guanajuato, 1998)*, volume 14 of *Aportaciones Mat. Investig.*, pages 1–64. Soc. Mat. Mexicana, México, 1998.
- [32] D. NUALART. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [33] E. PARDOUX. Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic pdes of second order. *Stochastic Analysis and Related Topics : The Geilo Workshop*, pages 79–127. Birkhäuser, 1996.
- [34] E. PARDOUX AND S. PENG. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastic partial differential equations and their applications*, volume 176 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 200–217. Springer, Berlin, 1992.
- [35] E. PARDOUX AND S. TANG. Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic pdes. *Probab. Th. Rel. Fields*, 114: 123–150, 1999.
- [36] S. PENG. A nonlinear Feynman-Kac formula and applications. *Control theory, stochastic analysis and applications*, pages 173–184. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [37] S. PENG AND Z. WU. Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control. *SIAM J. Control Optim.*, 37(3): 825–843, 1999.
- [38] P. PERONA AND J. MALIK. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12: 629–639, 1990.
- [39] J. E. ROMBALDI. *Analyse matricielle. Cours et exercices résolus*. EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [40] G. R. WHITHAM. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & sons, 1974.
- [41] M. WIEGNER. Global solutions to a class of strongly coupled parabolic systems. *Math. Ann.*, 292(4): 711–727, 1992.
- [42] W. A. WOYCZYŃSKI. *Burgers-KPZ turbulence*, volume 1700 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Göttingen lectures.
- [43] J. ZHANG. *Some fine properties of Backward Stochastic Differential Equations*. Ph.D. dissertation, Purdue University, 2001.

## **Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées : Equations aux dérivées partielles et discrétisation**

**Résumé :** Ce travail de thèse porte sur les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, en particulier celles dont le coefficient de diffusion progressif dépend de toutes les inconnues. Nous proposons une manière originale d'aborder le problème, nous permettant de retrouver des résultats classiques d'existence et d'unicité de Pardoux-Tang ou Yong. Nous obtenons de surcroît, en adoptant l'approche Pardoux-Tang en solutions de viscosité, des représentations probabilistes de toute une nouvelle classe d'EDP paraboliques dont les coefficients de dérivation d'ordre 2 dépendent du gradient de la solution. Nous proposons également un schéma de discrétisation itératif dont nous prouvons la convergence et évaluons l'erreur sur un exemple bien particulier.

**Mots-clefs :** équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées, waveform relaxation, équations aux dérivées partielles, schéma numérique.

**Classification AMS (2000) :** 60H10, 60H30, 60H35.

---

## **Forward backward stochastic differential equations : Partial differential equations and discretization**

**Abstract :** This thesis deals with the forward backward stochastic differential equations, in particular those with a coefficient of progressive diffusion which depends on all unknowns of the problem. We propose an original way to get onto this subject, letting us to reobtain some classical results of existence and uniqueness in the spirit of Pardoux-Tang and Yong's results, and to find a probabilistic representation of a new class of parabolic PDE, in which derivation coefficient of order 2 depends on the gradient of the solution. We also propose an iterative discretization scheme. We prove its convergence and give an evaluation of the error on a particular example.

**Key Words :** forward backward stochastic differential equation, partial differential equation, waveform relaxation, numerical scheme.

**AMS Classification (2000) :** 60H10, 60H30, 60H35.